



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

SO

Sede de  
Occidente

# Introducción al cálculo en varias variables

Bolívar Alonso Ramírez Santamaría

2020

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
SEDE DE OCCIDENTE

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO  
EN VARIAS VARIABLES

BOLÍVAR ALONSO RAMÍREZ SANTAMARÍA





515.076

R173i

**Ramírez Santamaría, Bolívar Alonso**

**Introducción al cálculo en varias variables/ Bolívar Alonso Ramírez  
Santamaría. -- 1. ed.-- San Ramón, Alajuela: Coordinación de Investigación,  
Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica, 2020.**

**565 páginas: ilustraciones a color**

**ISBN: 978-9930968987**

**1. CÁLCULO. 2. CÁLCULO-PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. I.**

**Título**

# Comisión Editorial

Universidad de Costa Rica  
Sede de Occidente

Doctora Magdalena Vásquez Vargas  
Coordinadora de Investigación

Magíster Minor Herrera Valenciano  
Editor de la Coordinación de Investigación

Licenciada Nidia González Vásquez  
Departamento de Filosofía, Artes y Letras

Magíster Ronald Sánchez Porras  
Departamento de Ciencias Naturales

Magíster Elena Valverde Alfaro  
Departamento de Ciencias de la Educación

Magíster Raúl Fonseca Hernández  
Departamento de Ciencias Sociales

Magíster Miguel Ángel Herrera Cuarezma  
Sistema de Estudios Generales

## **Asistente editorial**

Bach. Andrey Gómez Jiménez

## **Diseño y diagramación**

Licenciado José Azofeifa Solís

## **Portada**

Licenciado José Azofeifa Solís

## **Contactos**

Correo electrónico: [investigacion.so@ucr.ac.cr](mailto:investigacion.so@ucr.ac.cr)

Tels: 2511-7094 / 2511-7064

## Dedicatoria

A mi familia y en especial a mi hija Isabella, que me ha enseñado que lo más valioso de la vida se encuentra en los pequeños detalles, tal cual, su sonrisa.

# Prólogo

El presente texto representa una transposición didáctica de temas complejos de cálculo diferencial e integral en varias variables, de tal manera que el lector los pueda comprender sin entrar en formalidades, apelando en mayor medida a las aplicaciones matemáticas de los temas desarrollados, los cuales son: Cilindros, Conos y Superficies de Revolución, Funciones Vectoriales de variable real y de variable vectorial, Derivadas Parciales, Integrales Múltiples y Análisis Vectorial.

En este sentido, las muestras de los diferentes teoremas usados en este documento se pueden consultar en algunas de las referencias de la bibliografía, en su gran mayoría tomados de Apostol (2004), Stewart (2002) y Pita (1995). Sin embargo, la variedad de ejemplos expuestos con sus niveles de dificultad aspiran a complementar esta ausencia, los cuales están resueltos en su totalidad y donde la redacción fue escrita cuidadosamente para que el lector conozca y comprenda con detalle las distintas resoluciones. Abonado a ello y de ser necesario, se presentan figuras con valiosas ilustraciones gráficas que permiten una adecuada visualización de los ejemplos planteados, sobre todo en los capítulos cinco y seis.

Es importante mencionar que los ejemplos son consultados de todas las fuentes bibliográficas, sin embargo, la mayoría estaban sin resolver o con resoluciones poco detalladas. Además, las figuras son de elaboración propia, algunas pocas a partir de la bibliografía y fueron hechas usando el software *GeoGebra*, ya sea en dos dimensiones o tres dimensiones, para luego ser ligeramente remozadas en

*Inkscape*. Ambos programas son de uso libre. Solo la figura 6.3 fue elaborada en el paquete computacional *Mathematica*, no obstante, esta última aplicación fue de gran apoyo para corroborar las respuestas de algunos ejemplos y ejercicios.

Asimismo, con la finalidad de asimilar de mejor forma los contenidos, el texto cuenta con listas de ejercicios propuestos en los diferentes capítulos, cuyas respuestas, casi en su totalidad, pueden ser consultadas en el capítulo siete.

Es significativo aclarar que los conocimientos previos para comprender el material presentado en este trabajo son sobre el cálculo diferencial e integral en una variable, topología básica en  $\mathbb{R}^n$ , los sistemas de ecuaciones lineales, las matrices, las rectas y planos, las cónicas y las superficies cuadráticas básicas. Sin embargo, algunos aspectos básicos de algunos de estos temas se pueden consultar en el apéndice.

Finalmente, se indica que las partes del texto tienen numeración decimal. Así, la sección 5.2 es la segunda sección del capítulo 5. La sección 5.2.4 es la cuarta sección de la sección 5.2. Además, las definiciones, los teoremas, las figuras, las observaciones y los ejemplos tienen una numeración consecutiva de un solo decimal según el capítulo. Por ejemplo, la figura 5.8 representa la octava figura del capítulo 5. De igual manera, y con el fin de buscar las respuestas de los ejercicios de forma más sencilla, la numeración de estos se presenta de manera consecutiva a lo largo de todo el libro.

<b>1. Cilindros, conos y superficies de revolución</b>	<b>1</b>
1.1. Cilindro . . . . .	1
1.1.1. Ecuación de un cilindro . . . . .	1
1.2. Cono . . . . .	7
1.2.1. Ecuación de un cono . . . . .	7
1.3. Superficies de Revolución . . . . .	12
1.3.1. Ecuación de una superficie de revolución . . . . .	12
<b>2. Funciones Vectoriales de Variable Real</b>	<b>21</b>
2.1. Funciones vectoriales . . . . .	21
2.1.1. Operaciones con funciones vectoriales . . . . .	22
2.1.2. Límite de una función vectorial . . . . .	23
2.1.3. Derivada de una función vectorial . . . . .	24
2.1.4. Integral de una función vectorial . . . . .	25
2.2. Parametrización de una curva . . . . .	26
2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio . . . . .	37
2.4. Curvatura y torsión . . . . .	47
2.5. Parametrización por longitud de arco . . . . .	56
<b>3. Funciones Vectoriales de Variable Vectorial</b>	<b>64</b>
3.1. Funciones de varias variables . . . . .	64
3.2. Límites . . . . .	65
3.3. Continuidad . . . . .	69
3.4. Diferenciabilidad . . . . .	72
3.4.1. Derivadas Parciales . . . . .	72
3.4.2. Funciones diferenciables . . . . .	77
3.4.3. Gradiente. . . . .	80
3.4.4. Derivada direccional . . . . .	84
3.5. Plano tangente y recta normal a una superficie . . . . .	96
3.6. Regla de la cadena . . . . .	102
3.7. Derivada implícita . . . . .	113
<b>4. Aplicaciones de las Derivadas Parciales</b>	<b>133</b>
4.1. Máximos y mínimos locales . . . . .	133
4.1.1. Prueba de la segunda derivada en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	134
4.1.2. Prueba de la segunda derivada en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	147
4.2. Multiplicadores de Lagrange . . . . .	156
4.2.1. Clasificación de extremos con ligaduras . . . . .	164
<b>5. Integrales Múltiples</b>	<b>186</b>

5.1.	Integrales en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	186
5.1.1.	Integrales dobles sobre regiones rectangulares . . . . .	186
5.1.2.	Integrales dobles sobre regiones más generales . . . . .	188
5.1.3.	Área y volumen . . . . .	207
5.1.4.	Cambio de variables en una integral doble . . . . .	217
5.1.4.1.	Coordenadas polares . . . . .	238
5.1.4.2.	Coordenadas polares generalizadas . . . . .	248
5.2.	Integración en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	263
5.2.1.	Integrales triples sobre paralelepípedos rectangulares cerrados . . . . .	263
5.2.2.	Integrales triples sobre sólidos más generales . . . . .	265
5.2.3.	Volumen . . . . .	273
5.2.4.	Cambio de variables en una integral triple . . . . .	275
5.2.4.1.	Coordenadas cilíndricas . . . . .	283
5.2.4.2.	Coordenadas esféricas . . . . .	294
5.2.4.3.	Coordenadas cilíndricas generalizadas y coordenadas esféricas generalizadas . . . . .	315
<b>6.</b>	<b>Análisis Vectorial</b>	<b>326</b>
6.1.	Visualización de un campo vectorial . . . . .	327
6.2.	Campo vectorial gradiente . . . . .	328
6.3.	Campo vectorial conservativo . . . . .	333
6.4.	Integral de línea . . . . .	346
6.4.1.	Integral de línea sobre un campo escalar . . . . .	347
6.4.2.	Integral de línea sobre un campo vectorial . . . . .	356
6.4.3.	Aplicación de las integrales de línea . . . . .	364
6.4.4.	Independencia de la trayectoria. . . . .	365
6.5.	Teorema de Green en el plano . . . . .	382
6.6.	Parametrización de superficies . . . . .	404
6.7.	Áreas de superficies . . . . .	412
6.8.	Integral de superficie . . . . .	429
6.8.1.	Integral de superficie sobre un campo escalar . . . . .	429
6.8.2.	Integral de superficie sobre un campo vectorial (Integral de flujo) . . . . .	438
6.9.	Teorema de la Divergencia . . . . .	446
6.10.	Teorema de Stokes . . . . .	466
<b>7.</b>	<b>Respuestas de ejercicios</b>	<b>486</b>
<b>8.</b>	<b>Apéndices</b>	<b>512</b>
	Repaso de matrices. . . . .	512
	Repaso Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices. . . . .	516
	Repaso Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices. . . . .	521

Repaso de vectores en el plano y en el espacio. . . . .	525
Repaso de rectas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	530
Repaso de planos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	533
Repaso de Secciones Cónicas . . . . .	535
Repaso de Cuádricas . . . . .	539

<b>Bibliografía</b>	<b>542</b>
---------------------	------------



# Índice de figuras

1.1.	Cilindro Recto . . . . .	1
1.2.	Cilindro Generalizado . . . . .	1
1.3.	Los puntos $P$ y $Q$ están sobre la misma recta generatriz . . . . .	2
1.4.	Cono . . . . .	7
1.5.	Superficie de revolución . . . . .	12
1.6.	Generación de una superficie de revolución . . . . .	12
1.7.	Dibujo aproximado de la superficie de revolución solicitada . . . . .	17
1.8.	Superficie de revolución que corresponde al cilindro $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . . . . .	18
2.1.	Vector velocidad . . . . .	37
2.2.	Vector tangente unitario, vector normal unitario y vector binormal . . . . .	41
2.3.	Triedro intrínseco . . . . .	42
2.4.	Curva $\mathcal{C}$ formada por la intersección del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $x = y$ . . . . .	45
2.5.	Círculo osculador . . . . .	47
3.1.	Plano tangente y recta Normal a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $P$ . . . . .	96
4.1.	Extremos locales . . . . .	133
4.2.	Punto de silla . . . . .	134
4.3.	Región Triangular con vértices $A$ , $B$ y $C$ . . . . .	138
4.4.	Región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ . . . . .	140
4.5.	Región triangular $R$ . . . . .	142
4.6.	Caja rectangular en el primer octante . . . . .	145
4.7.	Caja paralelepípeda rectangular . . . . .	146
4.8.	Paralelepípedo rectangular dentro del elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$ en el primer octante . . . . .	152
4.9.	Conjunto $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3\}$ . . . . .	176
5.1.	Región rectangular cerrada . . . . .	186
5.2.	Región de tipo 1 . . . . .	188
5.3.	Región de tipo 2 . . . . .	188
5.4.	Región $R \subset \mathbb{R}^2$ acotada por las gráficas de $y = x$ , $y = \frac{x^2}{2}$ , en el intervalo $x \in [0, 2]$ . . . . .	190
5.5.	Región de tipo 1 . . . . .	192
5.6.	Región de tipo 2 . . . . .	192
5.7.	Región de tipo 1 . . . . .	193
5.8.	Región de tipo 2 . . . . .	193
5.9.	Región de tipo 2 . . . . .	195
5.10.	Región de tipo 1 . . . . .	195
5.11.	Región de tipo 1 . . . . .	197
5.12.	Región de tipo 2 . . . . .	197
5.13.	Región $R$ . . . . .	198

5.14. Región $R$ de tipo 1 . . . . .	199
5.15. Región $R$ de tipo 2 . . . . .	199
5.16. Región $R$ de tipo 2 . . . . .	200
5.17. Región $R$ de tipo 2 . . . . .	201
5.18. Región integración $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . . . . .	203
5.19. Región de integración $R = R_1 \cup R_2$ . . . . .	204
5.20. Región de integración $R$ . . . . .	205
5.21. Región de integración $R$ . . . . .	206
5.22. Región de integración $R$ de tipo 1, con $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . . . . .	208
5.23. Región de integración $R$ de tipo 2, con $R = R_1 \cup R_2$ . . . . .	209
5.24. Región de integración $R$ de tipo 2 . . . . .	210
5.25. Región $R$ que corresponde a la cuarta parte del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ . . . . .	211
5.26. Región $R$ que corresponde a la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . . . . .	212
5.27. Tetraedro formado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ en el primer octante . . . . .	214
5.28. Región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})\}$ . . . . .	215
5.29. Sólido $Q$ formado por la intersección de las superficies $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y $z = 2$ . . . . .	216
5.30. Región de integración $R$ . . . . .	218
5.31. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	219
5.32. Región de integración $R$ . . . . .	220
5.33. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	220
5.34. Región de integración $R$ . . . . .	222
5.35. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	222
5.36. Región de integración $R$ . . . . .	224
5.37. Región de integración de $R$ . . . . .	226
5.38. Región de integración $R'$ . . . . .	226
5.39. Región de integración $R$ . . . . .	227
5.40. Región de integración $R$ . . . . .	228
5.41. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	229
5.42. Región de integración $R$ . . . . .	230
5.43. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	231
5.44. Región de integración $R$ . . . . .	232
5.45. Nueva región de integración $R'$ . . . . .	233
5.46. Región de integración $R$ . . . . .	236
5.47. Región de integración $R$ vista como tipo 1 . . . . .	237
5.48. Región de integración $R$ en coordenadas polares . . . . .	239
5.49. Región de integración $R$ . . . . .	240
5.50. Región de integración $R$ . . . . .	242
5.51. Dominio de integración $R$ . . . . .	243
5.52. Región de integración $R'$ . . . . .	244
5.53. Región de integración $R$ . . . . .	245

5.54. Superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - (x^2 + y^2)$ . . . . .	245
5.55. Cuerpo sólido $Q$ . . . . .	246
5.56. Cuerpo sólido $Q$ . . . . .	247
5.57. Región de integración $R$ . . . . .	247
5.58. Región de integración $R$ en coordenadas rectangulares . . . . .	252
5.59. Caja rectangular . . . . .	263
5.60. Sólido de tipo 1 . . . . .	265
5.61. Sólido de tipo 2 . . . . .	266
5.62. Sólido de tipo 3 . . . . .	267
5.63. Sólido $Q$ . . . . .	267
5.64. Proyección del sólido $Q$ sobre el plano $xy$ . . . . .	268
5.65. Sólido $Q$ y su proyección en el plano $xz$ . . . . .	268
5.66. Tetraedro $Q$ con sus proyecciones en en plano $xy$ y $xz$ . . . . .	269
5.67. Proyección de $Q$ sobre el plano $xz$ . . . . .	270
5.68. Sólido $Q$ . . . . .	270
5.69. Proyección de $Q$ sobre el plano $xz$ . . . . .	271
5.70. Proyección de $Q$ sobre el plano $yz$ . . . . .	271
5.71. Sólido $Q$ . . . . .	272
5.72. Sólido $Q$ y su proyección en el plano $xy$ . . . . .	273
5.73. Sólido $Q$ . . . . .	274
5.74. Sólido $Q$ . . . . .	276
5.75. Trapecio sobre el plano $xy$ acotado por $x + y = 1$ , $x + y = 2$ , $y = 0$ y $y = x$ . . . . .	278
5.76. Sólido $Q$ . . . . .	278
5.77. Sólido $Q'$ . . . . .	279
5.78. Sólido $Q$ . . . . .	281
5.79. Sólido $Q$ y su proyección en el plano $xy$ . . . . .	284
5.80. Cilindro circular recto de radio $a$ y altura $h$ . . . . .	285
5.81. Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante . . . . .	286
5.82. Sólido $Q$ . . . . .	287
5.83. Proyección del sólido $Q$ en el plano $z = 0$ . . . . .	288
5.84. Cono circular recto de altura $h$ y radio $a$ con la base sobre $z = 0$ . . . . .	289
5.85. Sólido $Q$ . . . . .	290
5.86. Sólido $Q$ y su proyección sobre el plano $xy$ . . . . .	291
5.87. Sólido $Q$ y su proyección sobre el plano $xy$ . . . . .	292
5.88. Sólido $Q$ y su proyección en el plano $xy$ . . . . .	293
5.89. Región $R'$ sobre el plano $rz$ . . . . .	294
5.90. Coordenadas esféricas $P(\rho, \theta, \phi)$ . . . . .	295
5.91. Sólido $Q$ y las coordenadas esféricas . . . . .	297
5.92. Sólido $Q$ y las coordenadas esféricas . . . . .	298
5.93. Sólido $Q$ y las coordenadas esféricas . . . . .	298

5.94. Sólido $Q$ y parte de su proyección en el plano $zy$ . . . . .	300
5.95. Sólido $Q$ . . . . .	302
5.96. Coordenadas esféricas del sólido $Q$ . . . . .	302
5.97. Sólido $Q$ . . . . .	303
5.98. Coordenadas esféricas del sólido $Q$ . . . . .	304
5.99. Sólido $Q$ . . . . .	305
5.100 Región $R$ de tipo 1 . . . . .	306
5.101 Región $R$ de tipo 2 . . . . .	306
5.102 Proyección del sólido $Q$ sobre el plano $yz$ . . . . .	307
5.103 Región $R$ de tipo 1 . . . . .	308
5.104 Región $R$ de tipo 2 . . . . .	308
5.105 Sólido $Q$ . . . . .	309
5.106 Proyecciones del sólido $Q$ sobre los planos $xy$ y $yz$ respectivamente . . . . .	310
5.107 Región de tipo 1 y tipo 2 respectivamente en el plano $\phi\rho$ . . . . .	311
5.108 Sólido $Q$ y las coordenadas esféricas . . . . .	312
5.109 Proyección de $Q$ en el plano $rz$ . . . . .	313
5.110 Círculo $(x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ sobre el plano $y = 0$ . . . . .	313
5.111 Sólido $Q$ y su proyección en el plano $xz$ . . . . .	315
6.1. Campo vectorial $F(x, y) = (x, y)$ . . . . .	327
6.2. Campo vectorial $F(x, y) = (3x, 3y)$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ . . . . .	327
6.3. Campo vectorial $F(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z}, x\sqrt{1-z}, 0)$ sobre la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ . . . . .	328
6.4. Curva regular a trozos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$ . . . . .	346
6.5. Curva cerrada simple regular a trozos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$ , recorrida en sentido positivo . . . . .	347
6.6. Curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	349
6.7. Camino $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$ . . . . .	351
6.8. Camino $y = 1 -  1 - x $ desde $x = -1$ hasta $x = 3$ . . . . .	353
6.9. Curva de intersección entre las superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y$ . . . . .	354
6.10. Camino $\mathcal{C}$ . . . . .	357
6.11. Camino $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	361
6.12. Camino $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . . . . .	362
6.13. Camino $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	364
6.14. Conjuntos conexos . . . . .	365
6.15. Conjunto no conexo . . . . .	365
6.16. Conjunto convexo y conjunto no convexo respectivamente . . . . .	368
6.17. Curva cerrada simple regular a trozos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$ , recorrida en sentido positivo, que encierra una región conexa $R$ . . . . .	382
6.18. Región $R$ que consta de la curva $\mathcal{C}$ regular a trozos cerrada simple y su interior . . . . .	383
6.19. Región $R = R_1 \cup R_2$ . . . . .	383

6.20. Región $R$ acotada por la curva $\mathcal{C}$ regular a trozos cerrada simple . . . . .	384
6.21. Región $R$ acotada por la curva $\mathcal{C}$ regular a trozos cerrada simple . . . . .	385
6.22. Región $R$ acotada por la curva $\mathcal{C}$ regular a trozos cerrada simple . . . . .	386
6.23. Región $R$ acotada por la curva cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	387
6.24. Curva $\mathcal{C}$ que une los puntos $A, B, C, D, E, F, G$ y $H$ . . . . .	391
6.25. Hipocicloide de radio $a$ . . . . .	393
6.26. Región $R$ con huecos acotada por la curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . . . . .	394
6.27. Región $R$ con un solo hueco y con frontera $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ orientada positivamente	395
6.28. Región $R$ y curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	395
6.29. Región $R$ acotada por $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	396
6.30. Región $R$ acotada por $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_a$ . . . . .	398
6.31. Región $R$ acotada por $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . . . . .	399
6.32. Esfera de radio $a$ con centro en el origen . . . . .	404
6.33. Paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq h$ . . . . .	405
6.34. Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $0 \leq z \leq h$ . . . . .	406
6.35. Cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $-h \leq z \leq h$ . . . . .	407
6.36. Superficie plana $-y + z = 1$ limitada por el cono $2x^2 + 2y^2 = z^2$ . . . . .	409
6.37. Superficie cónica $2x^2 + 2y^2 = z^2, z \geq 0$ , limitada por el plano $-y + z = 1$ . . . . .	410
6.38. Región $R$ en el plano $xy$ . . . . .	414
6.39. Superficie parabólica $z = 9 - x^2 - y^2$ limitado por el plano $z = 0$ . . . . .	415
6.40. Región $S$ sobre el plano $x + y + z = a$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ ( $a > 0$ )	416
6.41. Superficie $S$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $z \geq 0$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = ay$ . . . . .	417
6.42. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$ y $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . . . . .	418
6.43. Superficie $S$ . . . . .	419
6.44. Superficie parabólica $S$ limitada por $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 16$ . . . . .	422
6.45. Superficie $S$ conocida como el toro . . . . .	423
6.46. Superficie $S$ limitada por el paraboloide $y = 4 - x^2 - z^2$ y el plano $y = 0$ . . . . .	425
6.47. porción del cono $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro $y^2 + z^2 =$ $1$ , y su proyección sobre el plano $yz$ . . . . .	426
6.48. porción del cono $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro $y^2 + z^2 =$ $1$ , y su proyección sobre el plano $xy$ . . . . .	427
6.49. Superficie cónica $S$ limitada por $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$ . . . . .	430
6.50. Superficie $S$ en el primer octante, limitada por $x = y^2$ entre los planos $z = 0$ , $z = 4, y = 1$ y $y = 2$ . . . . .	432
6.51. Casquete de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entre los planos $z = \frac{1}{2}$ y $z = 1$ . . . . .	433
6.52. Superficie $S$ formada por plano $6x + 4y + 3z = 12$ en el primer octante y su proyección en el plano $xy$ . . . . .	435
6.53. Superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . . . . .	436
6.54. Orientación del vector $\vec{n}$ . . . . .	446

6.55. La semiesfera y la banda de Möbius . . . . .	446
6.56. Sólido $Q$ , limitado por cuatro superficies . . . . .	448
6.57. Sólido $Q$ , limitado por tres superficies . . . . .	449
6.58. Superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . . . . .	452
6.59. Sólido $Q$ acotado por la superficie $S$ . . . . .	456
6.60. Sólido $Q$ acotado por la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . . . . .	458
6.61. Superficies $S_1$ y $S_2$ . . . . .	460
6.62. Regla del caminante . . . . .	467
6.63. Regla de la mano derecha . . . . .	467
6.64. Semiesfera con el borde orientado positivamente respecto al vector $\vec{n}$ . Porción de un plano con el borde orientado positivamente respecto al vector $\vec{n}$ . . . . .	467
6.65. Superficie $S$ cuyo borde es la curva $\mathcal{C}$ . . . . .	468
6.66. Superficie cónica $S$ y la curva $\mathcal{C}$ . . . . .	470
6.67. Superficie $S$ cuyo borde es la curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . . . . .	471
6.68. Superficie $S$ cuyo borde es la curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ . . . . .	473
6.69. Superficie $S$ cuyo borde es la curva $\mathcal{C}$ . . . . .	475
6.70. Superficie plana $S$ y la curva $\mathcal{C}$ . . . . .	476
6.71. Región proyectada de la superficie $S$ sobre el plano $xy$ . . . . .	477
6.72. Superficie $S$ . . . . .	478

# Capítulo 1

## Cilindros, conos y superficies de revolución

### 1.1. Cilindro

**Definición 1.1 (Cilindro)** Un cilindro es una superficie formada por una familia de rectas paralelas llamadas generatrices, que pasan por los puntos respectivos de una cierta curva directriz. Si la directriz está sobre el plano y si la generatriz es perpendicular a dicho plano, se dice que es un cilindro recto, de lo contrario, se llamará un cilindro generalizado.

**Observación 1.1** El cilindro recto con base circular, mostrado en la figura 1.1, es un caso particular del objeto matemático definido anteriormente. Por otro lado, la figura 1.2 hace referencia a un cilindro generalizado.

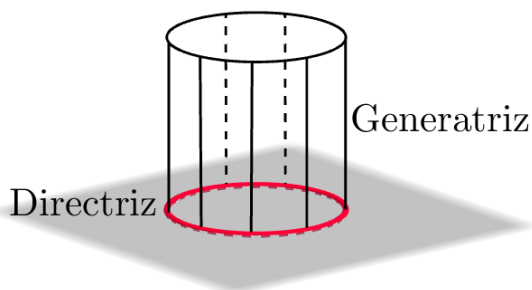


Figura 1.1: Cilindro Recto

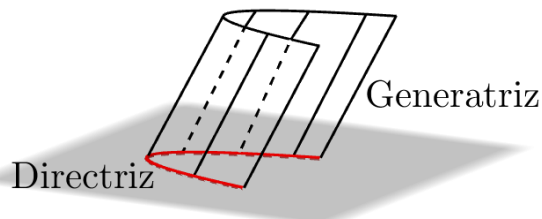


Figura 1.2: Cilindro Generalizado

#### 1.1.1. Ecuación de un cilindro

Suponga que la directriz está dada por la intersección de las superficies  $f_1(x, y, z) = 0$  y  $f_2(x, y, z) = 0$ , donde  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  es el vector director de la generatriz. Sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección de la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz, como lo muestra la figura 1.3.

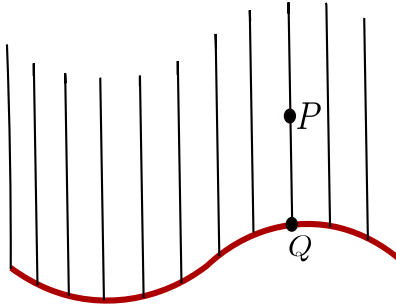


Figura 1.3: Los puntos  $P$  y  $Q$  están sobre la misma recta generatriz

Entonces, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + tu_1 \\ y_0 = y + tu_2 \\ z_0 = z + tu_3 \end{cases},$$

como  $Q(x_0, y_0, z_0)$  pertenece a la directriz,  $Q$  satisface las ecuaciones  $f_1(x_0, y_0, z_0) = 0$  y  $f_2(x_0, y_0, z_0) = 0$ , de modo que se puede hallar la ecuación del cilindro despejando el parámetro  $t$  del sistema

$$\begin{cases} f_1(x + tu_1, y + tu_2, z + tu_3) = 0 \\ f_2(x + tu_1, y + tu_2, z + tu_3) = 0 \end{cases}.$$

**Ejemplo 1.1** Halle la ecuación del cilindro que pasa por la curva directriz  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y + z = 3$ , y cuya generatriz es paralela a la recta  $x = y = z$ .

**Solución:** Note que un vector director de la generatriz es  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ . Sean  $P(x, y, z)$  y  $Q(x_0, y_0, z_0)$  los puntos descritos anteriormente, con ello existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{cases} x_0 = x + t \\ y_0 = y + t \\ z_0 = z + t \end{cases} \quad (1).$$

Como  $Q$  está en la directriz se cumple que

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 3 \end{cases} \quad (2).$$



## 1.1. Cilindro

Luego, sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

$$\begin{cases} (x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2 = 9 & (3) \\ x+t+y+t+z+t = 3 & (4) \end{cases} .$$

Se procede ahora a despejar el parámetro  $t$  de la ecuación (4), dando como resultado  $t = -\frac{1}{3}(x+y+z-3)$  y sustituya este valor en la igualdad (3), obteniendo la ecuación del cilindro buscada a continuación:

$$(2x - y - z + 3)^2 + (-x + 2y - z + 3)^2 + (-x - y + 2z + 3)^2 = 81.$$

**Ejemplo 1.2** Halle la ecuación del cilindro con directriz

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 9 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

y con generatrices perpendiculares al plano  $2x + y - 2z = 1$ .

**Solución:** Observe que  $\vec{u} = (2, 1, -2)$  es un vector director de la generatriz<sup>1</sup>. De forma similar al ejemplo pasado, sean  $P(x, y, z)$  y  $Q(x_0, y_0, z_0)$  los puntos descritos anteriormente, con ello existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + 2t \\ y_0 = y + t \\ z_0 = z - 2t \end{cases} \quad (1).$$

y dado que  $Q$  está en la directriz se tiene que

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 9 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 1 \end{cases} \quad (2).$$

posteriormente, sustituyendo (1) en (2) se obtiene

$$\begin{cases} (x+2t)^2 + (y+t)^2 - (z-2t)^2 = 9 & (3) \\ x+2t+y+t+z-2t = 1 & (4) \end{cases} .$$

---

<sup>1</sup>Recuerde que dado el plano  $ax + by + cz = d$ , su vector normal  $\vec{n} = (a, b, c)$  es perpendicular a dicho plano.

Es claro que de la igualdad (4)  $t = 1 - x - y - z$ , lo cual se sustituye en (3) y resulta la ecuación buscada siguiente:

$$(2 - x - 2y - 2z)^2 + (1 - x - z)^2 - (2 - 2x - 2y - 3z)^2 = 9.$$

**Ejemplo 1.3** Determine la ecuación de la superficie cilíndrica con directriz

$$C : \begin{cases} y = (x - 1)^2 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

y generatriz paralela a la recta  $x - 2z = 0$ ,  $y = z$ .

**Solución:** El vector director de la generatriz está dado por  $\vec{u} = (2, 1, 1)$ . De forma análoga a los ejemplos anteriores se obtiene el sistema

$$\begin{cases} y + t = (x + 2t - 1)^2 & (1) \\ z + t = x + 2t - 1 & (2) \end{cases} .$$

De (2) se tiene que  $t = -x + z + 1$  y se cambia en (1). Con ello la ecuación del cilindro solicitada corresponde a

$$-x + y + z + 1 = (-x + 2z + 1)^2.$$

**Ejemplo 1.4** Hallar la ecuación del cilindro que tiene por directriz la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$  y generatrices paralelas a la recta resultante de la intersección de los planos  $4y - z = 2$  y  $-3x + z = 5$ .

**Solución:** Observe que primero se necesita el vector director de la generatriz, el cual posee la misma dirección que el vector director de la recta de intersección entre los planos  $z = 4y - 2$  y  $z = 3x + 5$ . Dicha recta está dada por

$$l : \begin{cases} 4y - z = 2 \\ -3x + z = 5 \end{cases} .$$

## 1.1. Cilindro

De aquí se obtiene la matriz<sup>2</sup>  $\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$ , cuyo conjunto de solución es  $S = \left\{ \left( -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}s, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s, s \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$ . Con ello, la recta  $l$  en su forma vectorial es

$$l : (x, y, z) = \left( -\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, 0 \right) + s \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 \right).$$

Así el vector director está dado por  $\left( \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 \right)$ . Para evitar fracciones, tome otro vector paralelo al hallado, en particular sea  $\vec{u} = (4, 3, 12)$ . Luego, siguiendo un proceso idéntico a los ejemplos anteriores se obtiene que la ecuación cilíndrica buscada es

$$\left( x - \frac{z}{3} \right)^2 + \left( y - \frac{z}{4} \right)^2 = 9.$$

**Observación 1.2** Para reconocer si la ecuación de una superficie con tres variables representa una superficie cilíndrica, se procede de la siguiente forma:

1. Se interseca la superficie de manera conveniente con alguno de los planos coordenados para desaparecer una de las variables, obteniendo una curva que será llamada curva  $\mathcal{C}$  (si la superficie es cilíndrica la curva  $\mathcal{C}$  será una curva directriz).
2. Debe existir un vector de la forma  $\vec{u} = (a, b, 1)$  que sea paralelo a la generatriz del cilindro con curva directriz  $\mathcal{C}$  (en dicho vector  $\vec{u}$  siempre es posible reducir alguno de sus componentes a la unidad ya que los vectores directores son paralelos entre sí, en este caso se redujo a la unidad la tercera componente).

**Ejemplo 1.5** Verifique si la ecuación  $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 + z - y = 0$  representa una superficie cilíndrica.

**Solución:** Interseque la superficie dada con el plano coordenado  $z = 0$ , de donde se obtiene la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Suponga que esta curva  $\mathcal{C}$  es la directriz de una superficie cilíndrica. A partir de ello, sea  $\vec{u} = (a, b, 1)$  el vector director de la generatriz. Luego, siguiendo el esquema para encontrar la ecuación cilíndrica, sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección entre la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz, así existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que:

---

<sup>2</sup>Para obtener su forma escalonada reducida se usa el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_0 = x + at \\ y_0 = y + bt \\ z_0 = z + t \end{cases} \quad (1),$$

y dado que  $Q$  está en la directriz se tiene que

$$\begin{cases} x_0^3 - y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene

$$\begin{cases} (x + at)^3 - (y + bt) = 0 & (3) \\ z + t = 0 & (4) \end{cases}.$$

De (4) es evidente que  $t = -z$ , al sustituirlo en (3) y simplificando se tiene

$$x^3 - 3ax^2z + 3a^2xz^2 - a^3z^3 + bz - y = 0.$$

Al comparar dicho resultado con la superficie  $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 + z - y = 0$  dada originalmente, se concluye que  $a = 1$  y  $b = 1$ , con ello  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  y efectivamente dicha superficie es cilíndrica.

**Ejemplo 1.6** Considere la superficie  $x^2 - 4xz + 4z^2 - 3x + 7z - y + 3 = 0$ . Verifique dicha superficie es cilíndrica.

**Solución:** Siguiendo el esquema del ejemplo anterior, al intersecar la superficie con el plano coordenado  $z = 0$ , resulta la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - 3x - y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{C} : \begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 = y - \frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}.$$

El resto del proceso es análogo al ejemplo anterior, al final se obtiene la superficie

$$x^2 - 2axz + a^2z^2 - 3x + (3a + b)z - y + 3 = 0.$$

Este resultado se compara con la superficie  $x^2 - 4xz + 4z^2 - 3x + 7z - y + 3 = 0$ , de donde se infiere que  $a = 2$  y  $b = 1$ , así  $\vec{u} = (2, 1, 1)$  y por tanto dicha superficie es cilíndrica.

## 1.2. Cono

**Definición 1.2 (Cono)** Un cono es una superficie formada por una familia de rectas, llamadas generatrices, que pasan por un punto fijo llamado vértice y por los puntos respectivos de una curva directriz, como lo muestra la figura 1.4.

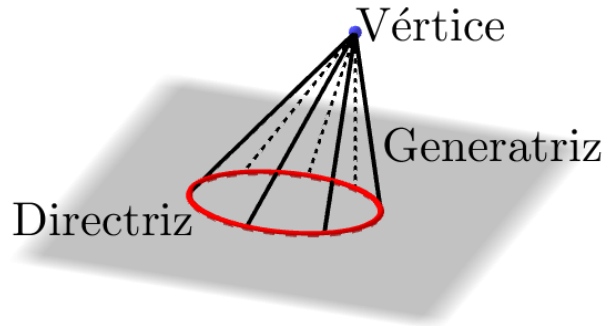


Figura 1.4: Cono

### 1.2.1. Ecuación de un cono

Suponga que la directriz está dada por la intersección de las superficies  $f_1(x, y, z) = 0$  y  $f_2(x, y, z) = 0$  y  $V(x_1, y_1, z_1)$  es el vértice. Sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección de la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz. Un vector director de la generatriz es  $\vec{u} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ , entonces existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + (x - x_1)t \\ y_0 = y + (y - y_1)t \\ z_0 = z + (z - z_1)t \end{cases} .$$

Como  $Q$  pertenece a la directriz se tiene que

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} ,$$

entonces, se puede hallar la ecuación del cono despejando el parámetro  $t$  del sistema

$$\begin{cases} f_1(x + (x - x_1)t, y + (y - y_1)t, z + (z - z_1)t) = 0 \\ f_2(x + (x - x_1)t, y + (y - y_1)t, z + (z - z_1)t) = 0 \end{cases} .$$

**Ejemplo 1.7** Halle la ecuación del cono con vértice  $(1, 2, -3)$  y curva directriz

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases} .$$

**Solución:** Sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz del cono y  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección de la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz. Un vector director de la generatriz es  $\vec{u} = (x - 1, y - 2, z + 3)$ , entonces existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + (x - 1)t \\ y_0 = y + (y - 2)t \\ z_0 = z + (z + 3)t \end{cases} \quad (1).$$

Además, como  $Q$  pertenece a la directriz se tiene que

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Sustituya (1) en (2), con lo cual se obtiene

$$\begin{cases} (x + (x - 1)t)^2 + (y + (y - 2)t)^2 = 4 & (3) \\ z + (z + 3)t = 0 & (4) \end{cases}$$

De la ecuación (4) se despeja  $t$  teniendo como resultado  $t = \frac{-z}{z + 3}$ , y esto se sustituye en (3), obteniendo la ecuación

$$\left(x - \frac{z(x - 1)}{z + 3}\right)^2 + \left(y - \frac{z(y - 2)}{z + 3}\right)^2 = 4.$$

La ecuación del cono encontrada se puede simplificar quedando

$$(3x + z)^2 + (3y + 2z)^2 = 4(z + 3)^2.$$

**Ejemplo 1.8** Encuentre la ecuación del cono cuyo vértice es el centro de la superficie cuadrática

$$x^2 - y^2 + 4x + 6y + z^2 = 10,$$

y cuya directriz es el círculo  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + y + z = 0$ .

## 1.2. Cono

**Solución:** Observe que el vértice del cono no está dado de forma explícita, pero se obtiene de la superficie cuadrática usando el proceso de completar cuadrados, esto es:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4x + 6y + z^2 &= 10 \\ \Rightarrow (x^2 + 4x + 4) - 4 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + z^2 &= 10 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 - (y - 3)^2 + z^2 &= 5 \\ \Rightarrow \frac{(x + 2)^2}{5} - \frac{(y - 3)^2}{5} + \frac{z^2}{5} &= 1. \end{aligned}$$

De esta forma se deduce que el centro de la superficie cuadrática es  $(-2, 3, 0)$  que viene siendo el vértice del cono. Siguiendo el mismo esquema de solución del ejemplo anterior, se infiere que un vector director de la generatriz es  $\vec{u} = (x + 2, y - 3, z)$ , entonces existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + (x + 2)t \\ y_0 = y + (y - 3)t \\ z_0 = z + zt \end{cases} \quad (1).$$

Dado que  $Q(x_0, y_0, z_0)$  está en la directriz del cono se cumple que

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Luego, sustituya (1) en (2), obteniendo

$$\begin{cases} (x + (x + 2)t)^2 + (y + (y - 3)t)^2 + (z + zt)^2 = 9 & (3) \\ x + (x + 2)t + y + (y - 3)t + z + zt = 0 & (4) \end{cases}.$$

En (4) se deduce que  $t = \frac{-(x + y + z)}{x + y + z - 1}$ , lo cual se cambia en (3), y se concluye la siguiente ecuación del cono:

$$(x(x + y + z - 1) - (x + 2)(x + y + z))^2 + (y(x + y + z - 1) - (y - 3)(x + y + z))^2 + (z(x + y + z - 1) - z(x + y + z))^2 = 9(x + y + z - 1)^2.$$

Si se simplifica un poco se obtiene que dicha ecuación es

$$(3x + 2y + 2z)^2 + (3x + 2y + 3z)^2 + z^2 = 9(x + y + z - 1)^2.$$

**Ejemplo 1.9** Determine la ecuación del cono cuyo vértice es el centro de la esfera  $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$  y cuya directriz es la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 16 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

**Solución:** Note que el vértice es  $V(0, 2, 3)$ . Siguiendo exactamente el mismo esquema del ejemplo anterior, se obtiene que  $t = \frac{-x + y - z}{x - y + z - 1}$  y que la ecuación del cono que se debe encontrar es:

$$x^2 \left( 1 + \frac{-x + y - z}{x - y + z - 1} \right)^2 + \left( y + (y - 2) \left( \frac{-x + y - z}{x - y + z - 1} \right) \right)^2 - 4 \left( z + (z - 3) \left( \frac{-x + y - z}{x - y + z - 1} \right) \right)^2 = 16.$$

Si se simplifica un poco se obtiene que

$$x^2 + (2x - 3y + 2z)^2 - 4(3x - 3y + 2z)^2 = 16(x - y + z - 1)^2.$$

**Ejemplo 1.10** Determine la ecuación del cono con vértice en el origen y con directriz la curva

$$C : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}, \text{ con } D \neq 0.$$

**Solución:** Sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz del cono y  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección de la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz. Dado que el vértice es  $V(0, 0, 0)$ , un vector director de la generatriz es  $\vec{u} = (x, y, z)$ , entonces existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + xt \\ y_0 = y + yt \\ z_0 = z + zt \end{cases} \quad (1).$$

Luego, como  $Q$  pertenece a la directriz se tiene que

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Al cambiar la ecuación (1) en la (2) se tiene que

$$\begin{cases} \frac{(x + xt)^2}{a^2} + \frac{(y + yt)^2}{b^2} + \frac{(z + zt)^2}{c^2} = 1 & (3) \\ A(x + xt) + B(y + yt) + C(z + zt) + D = 0 & (4) \end{cases}.$$



## 1.2. Cono

Así, de la ecuación (4) resulta que  $t = \frac{-Ax - By - Cz - D}{Ax + By + Cz}$ . Antes de sustituir este resultado, es conveniente simplificar la ecuación (3) como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{(x + xt)^2}{a^2} + \frac{(y + yt)^2}{b^2} + \frac{(z + zt)^2}{c^2} &= 1 \\ \Rightarrow b^2c^2x^2(1+t)^2 + a^2c^2y^2(1+t)^2 + a^2b^2z^2(1+t)^2 &= a^2b^2c^2 \\ \Rightarrow (1+t)^2(b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2) &= a^2b^2c^2 \quad (5).\end{aligned}$$

Con ello, proceda a cambiar  $t = \frac{-Ax - By - Cz - D}{Ax + By + Cz}$  en (5), simplifique un poco y se obtiene la ecuación del cono solicitada siguiente:

$$D^2(b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2) = a^2b^2c^2(Ax + By + Cz)^2,$$

o bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left( \frac{Ax + By + Cz}{D} \right)^2.$$

## 1.3. Superficies de Revolución

Se llama superficie de revolución a aquella que se obtiene al girar una curva plana  $\mathcal{C}$  alrededor de una recta, llamada eje de revolución, en el mismo plano, según se aprecia en la figura 1.5.

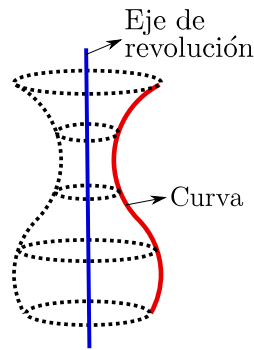


Figura 1.5: Superficie de revolución

### 1.3.1. Ecuación de una superficie de revolución

Sea  $\mathcal{C}$  la curva plana dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

que gira alrededor de la recta (llamada eje de revolución) con ecuación

$$\frac{x - \bar{x}}{a} = \frac{y - \bar{y}}{b} = \frac{z - \bar{z}}{c}.$$

Sea  $R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  un punto fijo sobre  $l$  y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  un punto arbitrario sobre la curva  $\mathcal{C}$ , un punto  $P(x, y, z)$  está sobre la superficie de revolución si está en la intersección entre la esfera con centro  $R$  y radio  $d(R, Q)$  y el plano perpendicular a  $l$  y que pasa por  $Q$  tal y como se muestra en la figura 1.6, entonces, se puede hallar la ecuación de la superficie de revolución despejando de la siguiente forma:

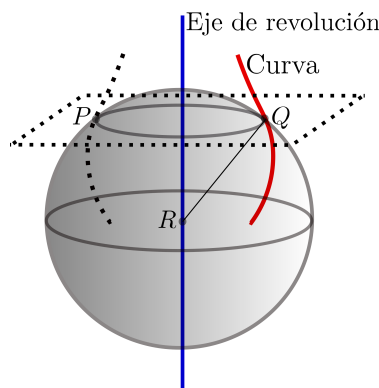


Figura 1.6: Generación de una superficie de revolución

### 1.3. Superficies de Revolución

- Dado que  $Q$  está en  $\mathcal{C}$ , entonces se cumple que

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0, z_0) = 0 & (1) \\ f_2(x_0, y_0, z_0) = 0 & (2) \end{cases} .$$

- El plano descrito en la figura 1.6 es perpendicular al eje de revolución dado por la recta  $l$ , entonces se puede decir que dicho plano tiene ecuación  $ax + by + cz = t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Puesto que  $P$  y  $Q$  están sobre ese plano, entonces se satisface que

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = t & (3) \\ ax + by + cz = t & (4) \end{cases} .$$

- Observe que  $\overline{RQ} \simeq \overline{PR}$  por el criterio de semejanza  $L - A - L$ , es decir, se tiene que  $d(Q, R) = d(P, R)$ , de donde resulta la igualdad

$$(x_0 - \bar{x})^2 + (y_0 - \bar{y})^2 + (z_0 - \bar{z})^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 \quad (5).$$

- De las ecuaciones (1), (2) y (3) se despeja los parámetros  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  en términos de  $t$ , con estos resultados y usando las ecuaciones (4) y (5), se obtiene la ecuación de la superficie de revolución.

**Ejemplo 1.11** Encontrar la superficie de revolución que se genera al girar la recta  $x - z = 1$ ,  $x - y + z = 0$ , alrededor del eje  $x = y = z$ .

**Solución:** De acuerdo con la construcción de la ecuación de una superficie de revolución hecha anteriormente, sea  $P(x, y, z)$  un punto arbitrario de dicha superficie y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  un punto sobre la recta  $\mathcal{C}$ , de esta forma:

$$\begin{cases} x_0 - z_0 = 1 & (1) \\ x_0 - y_0 + z_0 = 0 & (2) \end{cases} .$$

Observe que el vector director del eje de revolución es  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  y que  $R(0, 0, 0)$ , es decir,  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ . Con ello se tendría que

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = t & (3) \\ x + y + z = t & (4) \end{cases} .$$

Luego, la otra ecuación viene dada por

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5).$$

De (1), (2) y (3) se forma la matriz siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{t+2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t-2}{4} \end{array} \right),$$

es decir,  $x_0 = \frac{t+2}{4}$ ,  $y_0 = \frac{t}{2}$  y  $z_0 = \frac{t-2}{4}$ . Estos resultados se cambian en (5), quedando

$$\begin{aligned} \left(\frac{t+2}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + \left(\frac{t-2}{4}\right)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \Rightarrow 3t^2 + 4 &= 8(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Posteriormente, usando (4) se obtiene que la ecuación buscada es:

$$3(x + y + z)^2 + 4 = 8(x^2 + y^2 + z^2)$$

**Ejemplo 1.12** Encontrar la superficie de revolución que se genera al girar la curva recta

$$C : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases},$$

alrededor del eje de revolución  $\frac{x-1}{1} = \frac{3-y}{-2} = \frac{z+6}{3}$ .

**Solución:** Del eje de revolución se determina que  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  y que  $R(1, 3, -6)$ , es decir,  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{y} = 3$  y  $\bar{z} = -6$ . Luego, siguiendo el mismo esquema de solución del ejemplo anterior se obtiene las siguientes cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 + z_0 = 0 & (1) \\ 3x_0 - 2y_0 + 4z_0 = 1 & (2) \\ x_0 + 2y_0 + 3z_0 = t & (3) \\ x + 2y + 3z = t & (4) \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 3)^2 + (z_0 + 6)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 6)^2 & (5) \end{cases}.$$

### 1.3. Superficies de Revolución

De las ecuaciones (1), (2) y (3) puede formar una matriz con el fin de concluir que

$$x_0 = \frac{10t - 11}{5}, \quad y_0 = t - 1 \quad \text{y} \quad z_0 = \frac{-5t + 7}{5},$$

lo cual se cambia en la ecuación (5), obteniendo

$$\begin{aligned} (10t - 16)^2 + 25(t - 4)^2 + (-5t + 37)^2 &= 25((x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 6)^2) \\ \Rightarrow 6t^2 - \frac{178}{5}t + 81 &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 6)^2, \end{aligned}$$

Luego, como  $x + 2y + 3z = t$  por la ecuación (4), la ecuación de la superficie de revolución es

$$6(x + 2y + 3z)^2 - \frac{178}{5}(x + 2y + 3z) + 81 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 6)^2.$$

**Ejemplo 1.13** La hipérbola  $x^2 - z^2 = a^2$ ,  $y = 0$  gira alrededor de la asíntota  $z = x$ ,  $y = 0$ . Determine la ecuación de la superficie de revolución engendrada.

**Solución:** El eje de revolución tiene la forma  $l : (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 0, 1)$  con  $s \in \mathbb{R}$ .

En este sentido, el vector director de dicho eje es  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  y  $R(0, 0, 0)$ . Con esta información, y siguiendo la estructura de construcción de la ecuación de una superficie de revolución, se forman las siguientes cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0^2 - z_0^2 = a^2 & (1) \\ y_0 = 0 & (2) \\ x_0 + z_0 = t & (3) \\ x + z = t & (4) \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (5) \end{cases} .$$

De (1) se tiene que  $x_0^2 - z_0^2 = a^2$

$$\begin{aligned} (x_0 + z_0)(x_0 - z_0) &= a^2 \\ \Rightarrow t(x_0 - z_0) &= a^2 \quad \text{por la ecuación (3)} \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{a^2}{t} + z_0 \end{aligned}$$

Este resultado se cambia en (3), con lo que se obtiene que  $z_0 = \frac{t^2 - a^2}{2t}$  y con ello  $x_0 = \frac{t^2 + a^2}{2t}$ . Estos dos últimos resultados, más el hecho de que  $y_0 = 0$  por la ecuación (2), se cambian en la

ecuación (5), como sigue:

$$\left(\frac{t^2 - a^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + a^2}{2t}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

que al simplificar equivale a  $t^4 + a^4 = 2t^2(x^2 + y^2 + z^2)$ . Por último, usando la ecuación (4) en este resultado se llega a la ecuación de la superficie de revolución buscada siguiente:

$$(x + z)^4 + a^4 = 2(x + z)^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

**Ejemplo 1.14** Determine la ecuación de la superficie de revolución obtenida al girar la curva

$$C : \begin{cases} z = x + y \\ y = 1 \end{cases},$$

alrededor del eje  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{-z+1}{1}$ .

**Solución:** El eje de revolución es  $l : (x, y, z) = (0, 3, 1) + s(2, 1, -1)$ , entonces  $\vec{u} = (2, 1, -1)$  y  $R(0, 3, 1)$ . Tomando en cuenta los pasos de construcción de la ecuación de una superficie de revolución, se obtienen las siguientes cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} z_0 = x_0 + y_0 & (1) \\ y_0 = 1 & (2) \\ 2x_0 + y_0 - z_0 = t & (3) \\ 2x + y - z = t & (4) \\ x_0^2 + (y_0 - 3)^2 + (z_0 - 1)^2 = x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 & (5) \end{cases}.$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se deduce que  $x_0 = t$ ,  $y_0 = 1$  y  $z_0 = t + 1$ , lo cual se cambia en la ecuación (5), quedando

$$\begin{aligned} t^2 + (1 - 3)^2 + (t + 1 - 1)^2 &= x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \\ \Rightarrow 2t^2 + 4 &= x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2. \end{aligned}$$

Ahora, sustituya la igualdad (4) en el resultado anterior para obtener la ecuación de la superficie de revolución buscada siguiente:

$$(2x + y - z)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2).$$

### 1.3. Superficies de Revolución

**Ejemplo 1.15** Determine la ecuación de la superficie de revolución, engendrada al girar la curva  $y^2 = 4x$ ,  $z = 0$ , alrededor de la recta  $x = -1$ ,  $z = 0$ . Identifique y realice un dibujo de dicha superficie.

**Solución:** Note que el eje de revolución es  $l : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + s(0, 1, 0)$ , es decir,  $\vec{u} = (0, 1, 0)$  y  $R(-1, 0, 0)$ . Considerando los mismos pasos de construcción de la ecuación de una superficie de revolución, se obtienen las siguientes cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0^2 = 4x_0 & (1) \\ z_0 = 0 & (2) \\ y_0 = t & (3) \\ y = t & (4) \\ (x_0 + 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2 & (5) \end{cases} .$$

A partir de las ecuaciones (1), (2) y (3) es claro  $y_0 = t$ ,  $x_0 = \frac{t^2}{4}$  y  $z_0 = 0$ . Cambie estos resultados en (5) y use el hecho que  $y = t$ , así se obtiene la siguiente superficie de revolución:

$$(y^2 + 4)^2 = 16(x + 1)^2 + 16z^2.$$

Para proceder a dibujarla, bosqueje la curva plana

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases} ,$$

y la recta  $x = -1$ ,  $z = 0$ , o lo que es lo mismo, la recta  $l : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + s(0, 1, 0)$ . Proceda a rotar la curva  $\mathcal{C}$  sobre la recta  $l$ , obteniendo así un dibujo aproximado de la superficie de revolución, según se muestra en la figura 1.7, la cual representa un hiperboloide de una hoja.

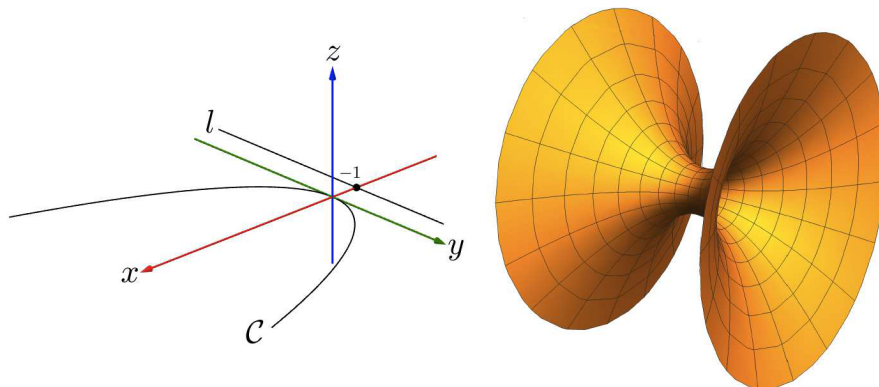


Figura 1.7: Dibujo aproximado de la superficie de revolución solicitada

**Ejemplo 1.16** Determine la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar el eje  $z$  alrededor de la recta  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = 0$ . Diga que superficie se forma al final y realice un dibujo de esta.

**Solución:** En este caso la curva es la recta que corresponde al eje  $z$ , que se puede ver como la intersección de los planos coordenados  $x = 0$  y  $y = 0$ , es decir,

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Luego, el eje de revolución está dado por  $l : (x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) + s(0, 0, 1)$ , de donde se deduce que  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  y  $R\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ . Considerando los pasos para construir la superficie de revolución se generan las siguientes cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 = 0 & (1) \\ y_0 = 0 & (2) \\ z_0 = t & (3) \\ z = t & (4) \\ \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 & (5) \end{cases} .$$

De estas cinco igualdades se deduce que

$$\frac{a^2}{4} + z^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2,$$

la cual es la ecuación de la superficie de revolución, que corresponde a un cilindro recto de base circular y de radio  $\frac{a}{2}$  centrado en el punto  $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ , como lo muestra la figura 1.8. La ecuación del cilindro se puede simplificar más quedando  $x^2 - ax + y^2 = 0$ .

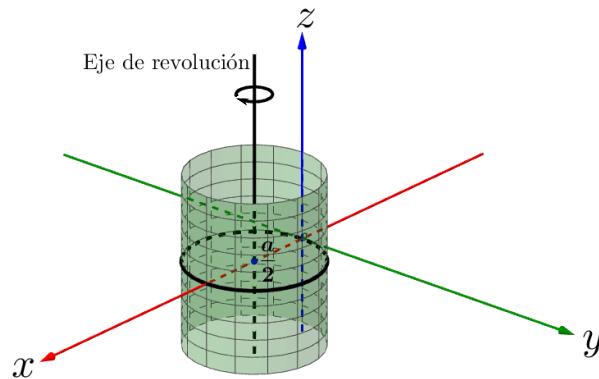


Figura 1.8: Superficie de revolución que corresponde al cilindro  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



## Ejercicios

**Ejercicio 1** Determine la ecuación del cilindro que tiene por directriz la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - 2z = 0 \end{cases},$$

y generatrices paralelas a la recta  $x = z$ ,  $y = 2z$ .

**Ejercicio 2** Halle la ecuación del cilindro que tiene por directriz la curva  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$  y generatrices paralelas a la recta  $z = 4y - 2$ ,  $z = 3x + 5$ .

**Ejercicio 3** Encontrar la ecuación del cilindro cuyas generatrices son perpendiculares al plano  $2x + 3y + 4z = 0$  y que tiene por directriz la curva plana  $x^2 + xy + y^2 = 0$ ,  $z = 0$ .

**Ejercicio 4** Halle la ecuación del cono con vértice  $(1, 0, 2)$  y directriz la curva  $C$  de intersección de las superficies  $2x + 2y - z = -2$ ,  $z = x^2 + y^2$ .

**Ejercicio 5** Determine la ecuación del cono que tiene como directriz la curva  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $x + y - z = 0$  y vértice el punto  $(0, 0, 5)$ .

**Ejercicio 6** Halle la ecuación del cono con vértice en el punto  $(1, 1, 0)$  y con directriz la curva

$$C : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2xy + xz + yz = 1 \end{cases}.$$

**Ejercicio 7** Encontrar la ecuación del cono cuyo vértice es el centro del elipsoide  $36x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 144x + 18y + 9 = 0$  y cuya directriz es la intersección de este elipsoide con el plano  $x + y = 0$ .

**Ejercicio 8** La recta  $l : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$  gira alrededor del eje  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{6} = z+3$ . Determine la ecuación de la superficie de revolución engendrada.

**Ejercicio 9** Halle la ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva

$$C : \begin{cases} xy = 10 \\ y = 0 \end{cases},$$

en torno al eje de revolución  $l : x - y = 0, z = 0$ .

**Ejercicio 10** Determine la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva  $(y - 2)^2 = 4(x + 3), z = 0$ , alrededor del eje  $x = -3, z = 0$ .

**Ejercicio 11** Obtenga la ecuación de la superficie de revolución generada al girar

$$C : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

alrededor de la recta  $\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{2} = \frac{3 - z}{1}$ .

**Ejercicio 12** Considere el círculo  $(x - 5)^2 + z^2 = 9$  sobre el plano  $y = 0$ . Muestre que la ecuación de la superficie de revolución que se genera al hacer girar dicho círculo alrededor del eje  $z$  tiene por fórmula

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 68(x^2 + y^2) + 32z^2 + 256 = 0.$$

Luego, escriba las fórmulas de las curvas que se obtienen al realizar la intersección de esta superficie de revolución con el plano  $z = 0$ .

**Ejercicio 13** Determine la ecuación de la superficie de revolución que se forma al girar la curva  $z^2 = x - 2, y = 0$ , alrededor de la recta que pasa por  $(1, 0, 0)$  y con dirección  $(0, 0, 1)$ .

**Ejercicio 14** Halle la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la recta

$$C : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ z = 1 \end{cases},$$

alrededor de la recta  $x - 3y + 2 = 0, z = 0$ .

# Capítulo 2

## Funciones Vectoriales de Variable Real

### 2.1. Funciones vectoriales

**Definición 2.1 (Función vectorial)** Una función vectorial de variable real es una aplicación de la forma  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , donde  $x_i(t)$  es una función real de variable real para  $i = 1, 2, \dots, n$ , llamadas funciones coordenadas.

**Observación 2.1** En particular, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  se denota  $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$  o bien  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , considerando que  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , denominados vectores canónicos de  $\mathbb{R}^3$ . En este caso se dice que  $f(t)$  se escribe como combinación lineal de los vectores canónicos.

**Ejemplo 2.1** Las siguientes son funciones vectoriales de variable real.

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(t) = (2 \cos t, -\sin t, t)$ .
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = P + t\vec{u}$ , con  $\vec{u}$  un vector director y  $P$  un punto, ambos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.2** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(t) = (t + 2)\vec{i} + (2t^2 - 3)\vec{j} + t^3\vec{k}$ .

1. Calcule los vectores  $f(-1)$  y  $f(2)$ .
2. Para qué valores de  $t$  el vector de posición  $f(t)$  está sobre uno de los planos coordenados.

**Solución:**

1. Observe que

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1 + 2)\vec{i} + (2 \cdot (-1)^2 - 3)\vec{j} + (-1)^3\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1). \\ f(2) &= (2 + 2)\vec{i} + (2 \cdot (2)^2 - 3)\vec{j} + (2)^3\vec{k} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k} = (4, 5, 8). \end{aligned}$$

2. Para que los puntos de  $f(t)$  estén sobre el plano  $xy$  (o bien el plano  $z = 0$ ), entonces el componente que acompaña al vector  $\vec{k}$  debe ser cero, es decir,  $t^3 = 0$ , lo cual arroja el valor de  $t = 0$ .

Similarmente, para que los puntos de  $f(t)$  estén sobre el plano  $xz$  (o bien el plano  $y = 0$ ), entonces el componente que acompaña al vector  $\vec{j}$  debe ser cero, esto implica la igualdad,  $2t^2 - 3 = 0$ , lo que da como valores  $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Usando el mismo razonamiento, se infiere que  $t = -2$  para que  $f(t)$  esté sobre el plano  $yz$  (o bien  $x = 0$ ).

### 2.1.1. Operaciones con funciones vectoriales

**Definición 2.2 (Operaciones con funciones vectoriales)** Sean  $r, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos funciones vectoriales de variable real y sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de variable real (también llamada función escalar), se define

1.  $(r \pm f)(t) = r(t) \pm f(t)$ .
2.  $(\alpha f)(t) = \alpha(t)f(t)$ .
3.  $(r \times f)(t) = r(t) \times f(t)$ , para  $n = 3$ , donde  $\times$  es el producto vectorial o cruz en  $\mathbb{R}^3$ .
4.  $(r \cdot f)(t) = r(t) \cdot f(t)$ , donde  $\cdot$  es el producto escalar o punto en  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.3** Sean  $r, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos funciones vectoriales tales que  $r(t) = (t^2, t, -\text{sen } t)$  y  $f(t) = (t, 1/t, 5)$ , calcule  $(r \times f)(t)$  y  $(r \cdot f)(t)$ .

**Solución:** Para  $(r \times f)(t)$  note que

$$(r \times f)(t) = r(t) \times f(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & t & -\operatorname{sen} t \\ t & \frac{1}{t} & 5 \end{vmatrix} = \left( 5t + \frac{\operatorname{sen} t}{t}, -5t^2 - t \operatorname{sen} t, t - t^2 \right).$$

Luego, para  $(r \cdot f)(t)$  se tiene que

$$(r \cdot f)(t) = r(t) \cdot f(t) = (t^2, t, -\operatorname{sen} t) \cdot \left( t, \frac{1}{t}, 5 \right) = t^3 + 1 - 5 \operatorname{sen} t.$$

### 2.1.2. Límite de una función vectorial

**Definición 2.3 (Límite de una función vectorial)** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , el límite de  $f$  cuando  $t$  tiende a  $c \in \mathbb{R}$  es

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = \left( \lim_{t \rightarrow c} x_1(t), \lim_{t \rightarrow c} x_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow c} x_n(t) \right),$$

siempre que  $\lim_{t \rightarrow c} x_i(t)$  exista para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Ejemplo 2.4** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f(t) = \left( \frac{\operatorname{sen}(3t)}{2t}, \frac{\sqrt{t^3}}{t}, -\cos t \right)$ , determine  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ .

**Solución:**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3t)}{2t}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^3}}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} (-\cos t) \right) = \left( \frac{3}{2}, 0, -1 \right).$$

**Observación 2.2** En relación con los límites de una función vectorial se tienen los siguientes puntos:

1. Se puede dar una definición similar para los límites laterales.
2. Una función vectorial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $c$  si  $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c)$ .
3. Muchas de las definiciones y resultados conocidos para funciones escalares se extienden de manera análoga a funciones vectoriales.
4. Algunas propiedades importantes, para  $r$  y  $f$  funciones vectoriales, son:

- a.  $\lim_{t \rightarrow c} r(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow c} \|r(t) - L\| = 0.$

- b.  $\lim_{t \rightarrow c} r(t) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow c} \|r(t)\| = \|L\|.$
- c.  $\lim_{t \rightarrow c} (r \times f)(t) = \left( \lim_{t \rightarrow c} r(t) \right) \times \left( \lim_{t \rightarrow c} f(t) \right).$
- d.  $\lim_{t \rightarrow c} (r \cdot f)(t) = \left( \lim_{t \rightarrow c} r(t) \right) \cdot \left( \lim_{t \rightarrow c} f(t) \right).$

### 2.1.3. Derivada de una función vectorial

**Definición 2.4 (Derivada de una función vectorial)** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , la derivada de  $f(t)$  cuando  $t = a \in \mathbb{R}$ , denotada  $f'(a)$ , se define como el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

si este existe.

**Teorema 2.1** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , si  $x_i(t)$  es derivable para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces

$$f'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)).$$

**Ejemplo 2.5** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(t) = (\ln(t^3), e^{-5t}, \cos t)$ , calcule  $f'(t)$ ,  $f''(t)$  y  $f'''(t)$ .

**Solución:**

- $f'(t) = \left( \frac{3}{t}, -5e^{-5t}, -\sin t \right).$
- $f''(t) = \left( \frac{-3}{t^2}, 25e^{-5t}, -\cos t \right).$
- $f'''(t) = \left( \frac{6}{t^3}, -125e^{-5t}, \sin t \right).$

**Teorema 2.2** Sean  $r, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones vectoriales de variable real,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar y  $k \in \mathbb{R}$  una constante, entonces

1.  $(r + f)'(t) = r'(t) + f'(t)$ .
2.  $(r \cdot f)'(t) = r'(t) \cdot f(t) + r(t) \cdot f'(t)$ .
3.  $(r \times f)'(t) = r'(t) \times f(t) + r(t) \times f'(t)$ , con  $n = 3$ .
4.  $(\alpha r)'(t) = \alpha'(t)r(t) + \alpha(t)r'(t)$ .
5.  $(kr)'(t) = kr'(t)$ .
6. Regla de la cadena  $[r(\alpha(t))]'(t) = r'(\alpha(t))\alpha'(t)$ .

**Ejemplo 2.6** Sean  $r, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $r(t) = (2t^2, -3, 0)$  y  $f(t) = (1, t, t^2)$  y sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(t) = t^3$ , calcule  $(r \cdot f)'(t)$ ,  $(r \times f)'(t)$  y  $[r(\alpha(t))]'$ .

**Solución:**

- $(r \cdot f)'(t) = r'(t) \cdot f(t) + r(t) \cdot f'(t) = 4t - 3$ .
- $(r \times f)'(t) = r'(t) \times f(t) + r(t) \times f'(t) = (4t, 0, 0) \times (1, t, t^2) + (2t^2, -3, 0) \times (0, 1, 2t) = (0, -4t^3, 4t^2) + (-6t, -4t^3, 2t^2) = (-6t, -8t^3, 6t^2)$ .
- $[r(\alpha(t))]' = [r(t^3)]' = [(2t^6, -3, 0)]' = (12t^5, 0, 0)$ .  
Otra forma es usar la regla de cadena, esto es:

$$[r(t^3)]' = r'(t^3)(t^3)' = (4t^3, 0, 0) \cdot 3t^2 = (12t^5, 0, 0).$$

### 2.1.4. Integral de una función vectorial

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , suponga que  $x_i(t)$  es integrable sobre  $[a, b]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces la integral definida de  $f$  sobre  $[a, b]$  está dada por

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b x_1(t) dt, \int_a^b x_2(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right).$$

**Ejemplo 2.7** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(t) = \left( 3^t, t^2, \frac{1}{1+t^2} \right)$ , calcule  $\int_0^1 f(t) dt$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \left( \int_0^1 3^t dt, \int_0^1 t^2 dt, \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\ &= \left( \frac{3^t}{\ln 3} \Big|_{t=0}^{t=1}, \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=1}, \arctan(t) \Big|_{t=0}^{t=1} \right) . \\ &= \left( \frac{2}{\ln 3}, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{4} \right) . \end{aligned}$$

**Teorema 2.3** Sean  $r, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y sea  $k \in \mathbb{R}$ , entonces,

1.  $\int_a^b (r + f)(t) dt = \int_a^b r(t) dt + \int_a^b f(t) dt.$
2.  $\int_a^b kf(t) dt = k \int_a^b f(t) dt.$
3.  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$

## 2.2. Parametrización de una curva

A veces es útil considerar las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  que satisfacen la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} ,$$

como funciones reales de variable real, es decir,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y  $z = z(t)$  donde  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , siendo  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . En este caso, la nueva variable  $t$  se llama parámetro, las funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y  $z = z(t)$  se denominan ecuaciones paramétricas de la curva  $\mathcal{C}$  y la función vectorial  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  con  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  se llama parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  o bien, ecuación vectorial paramétrica de la curva  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 2.8** Parametrice la curva rectilínea dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} .$$

**Solución:** Note que  $y = 1 - x$  y  $z = 1 - x$ . Con ello, tome  $x = t$ , entonces  $y = 1 - t$  y  $z = 1 - t$ .



## 2.2. Parametrización de una curva

Así, una parametrización de la curva es

$$r(t) = (t, 1 - t, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

También se puede escribir  $r(t) = (0, 1, 1) + t(1, -1, -1)$ , que corresponde a la recta que pasa por el punto  $(0, 1, 1)$  con vector director  $(1, -1, -1)$ .

**Ejemplo 2.9** Parametrice la curva definida por

$$C: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases}.$$

**Solución:** Observe que la curva dada realmente es la intersección de dos planos, de donde se infiere que la curva corresponde a una recta. Para determinar una ecuación paramétrica de dicha recta, considere la matriz

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right),$$

de donde se deduce que  $x + 3z = 3$  (es decir,  $x = 3 - 3z$ ) y  $y - 2z = -1$  (es decir,  $y = -1 + 2z$ ). Tome como parámetro  $z = t$ , obteniendo la parametrización siguiente:

$$r(t) = (3 - 3t, -1 + 2t, t),$$

con  $t \in \mathbb{R}$ . Así, dicha recta pasa por el punto  $(3, -1, 0)$  con vector director  $(-3, 2, 1)$ .

**Ejemplo 2.10** Determine una parametrización para el segmento de recta que va desde el punto  $A(2, -1, 3)$  hasta el punto  $B(1, 3, -4)$ .

**Solución:** Usando teoría de Álgebra Lineal, se tiene que la dirección del segmento  $\overline{AB}$  viene dada por el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4, -7)$ . Así, una parametrización para el segmento dado es

$$\begin{aligned} r(t) &= (2, -1, 3) + t(-1, 4, -7) \\ &= (2 - t, -1 + 4t, 3 - 7t). \end{aligned}$$

Note que  $t \in [0, 1]$ , pues si  $t = 0$  se tiene que  $r(0) = (2, -1, 3)$ , siendo este el punto inicial del segmento  $\overline{AB}$ , y si  $r(1)$  se obtiene que  $r(1) = (1, 3, -4)$ , siendo este el punto final del segmento  $\overline{AB}$ .

**Observación 2.3** En general, sean  $A$  y  $B$  dos puntos en  $\mathbb{R}^n$ , el segmento de recta con punto inicial  $A$  y punto final  $B$  se puede describir mediante la parametrización  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $r(t) = (1 - t)A + tB$ . Entonces, en relación con el ejemplo 2.10, se tendría que el segmento  $\overline{AB}$  se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} r(t) &= (1 - t)(2, -1, 3) + t(1, 3, -4) \\ &= (2 - t, -1 + 4t, 3 - 7t) \text{ con } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.11** Parametrice la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

**Solución:** Sean  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  y  $z(t) = 0$ , que efectivamente cumple con las ecuaciones de la curva  $\mathcal{C}$ . Así,

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ , es la curva parametrizada, la cual corresponde a una circunferencia centrada en el origen y de radio 1 sobre el plano  $z = 0$ .

**Ejemplo 2.12** Parametrice la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases} ,$$

donde  $a > 0$ .

**Solución:** Tome  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = a \sin t$  y  $z(t) = a \sin t$ . Entonces una parametrización de la curva corresponde a

$$r(t) = (a \cos t, a \sin t, a \sin t), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

**Ejemplo 2.13** Parametrice la curva dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y + z = 1 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2y - 2z = 3 \end{cases} .$$

## 2.2. Parametrización de una curva

**Solución:** Note que  $z = 1 - y$ , lo cual se sustituye en  $4x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2y - 2z = 3$ , esto es:

$$\begin{aligned} & 4x^2 + y^2 + (1 - y)^2 - 2y(1 - y) + 2y - 2(1 - y) = 3 \\ \Rightarrow & 4x^2 + y^2 + 1 - 2y + y^2 - 2y + 2y^2 + 2y - 2 + 2y = 3 \\ \Rightarrow & & 4x^2 + 4y^2 = 4 \\ \Rightarrow & & x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Con ello se induce que  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  y  $z = 1 - \sin t$ , donde  $t \in [0, 2\pi]$ , o bien

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \sin t).$$

**Ejemplo 2.14** Parametrice la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x + z = 2 \\ y^2 = xz \end{cases}.$$

**Solución:** Del plano se obtiene que  $z = 2 - x$ , lo cual se sustituye en la superficie  $y^2 = xz$  y se completa cuadrados, esto es:

$$\begin{aligned} & y^2 = x(2 - x) \\ \Rightarrow & y^2 + x^2 - 2x = 0 \\ \Rightarrow & y^2 + (x - 1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Luego, sea  $y(t) = \sin t$  y  $x - 1 = \cos t$ , es decir,  $x(t) = 1 + \cos t$ . Con ello, y dado que  $z = 2 - x$ , se tiene que  $z(t) = 1 - \cos t$ . Así, una posible ecuación paramétrica para la curva  $\mathcal{C}$  es

$$r(t) = (1 + \cos t, \sin t, 1 - \cos t), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Otra forma de parametrizar esta curva es hacer  $z = t$ , entonces  $x = 2 - t$  y además  $y^2 = t(2 - t)$ , con lo cual

$$r(t) = \left( 2 - t, \pm \sqrt{2t - t^2}, t \right),$$

donde  $2t - t^2 \geq 0$ , es decir,  $t \in [0, 2]$ .

**Ejemplo 2.15** Parametrice la curva de intersección de la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  con el plano  $2x + y - z = 0$ .

**Solución:** Del plano se despeja la variable  $z$ , esto es  $z = 2x + y$ , lo cual se sustituye en la ecuación de la esfera y luego se procede a completar cuadrados, como sigue:

$$\begin{aligned}
 25 &= x^2 + y^2 + (2x + y)^2 \\
 \Rightarrow 25 &= 5x^2 + 4xy + 2y^2 \\
 \Rightarrow 5 &= x^2 + \frac{4}{5}xy + \frac{2}{5}y^2 \\
 \Rightarrow 5 &= x^2 + \frac{4}{5}xy + \left(\frac{2}{5}y\right)^2 - \left(\frac{2}{5}y\right)^2 + \frac{2}{5}y^2 \\
 \Rightarrow 5 &= \left(x + \frac{2}{5}y\right)^2 - \frac{4}{25}y^2 + \frac{2}{5}y^2 \\
 \Rightarrow 5 &= \left(x + \frac{2}{5}y\right)^2 + \frac{6}{25}y^2 \\
 \Rightarrow 5 &= \left(x + \frac{2}{5}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{5}y\right)^2 \quad (1).
 \end{aligned}$$

La ecuación (1) obtenida sugiere que

$$\begin{cases} x + \frac{2}{5}y = \sqrt{5} \cos t \\ \frac{\sqrt{6}}{5}y = \sqrt{5} \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{5} \cos t - 2\sqrt{\frac{5}{6}} \sin t \\ y(t) = 5\sqrt{\frac{5}{6}} \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Además, con este resultado y puesto que  $z = 2x + y$ , se obtiene que

$$z(t) = 2\sqrt{5} \cos t + \sqrt{\frac{5}{6}} \sin t.$$

Finalmente, la parametrización solicitada de la curva es

$$r(t) = \left( \sqrt{5} \cos t - 2\sqrt{\frac{5}{6}} \sin t, 5\sqrt{\frac{5}{6}} \sin t, 2\sqrt{5} \cos t + \sqrt{\frac{5}{6}} \sin t \right),$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Ejemplo 2.16** Considere la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = z^2 \end{cases}.$$

1. Pruebe que la curva  $\mathcal{C}$  se encuentra sobre la esfera  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ .
2. Parametrice la curva  $\mathcal{C}$  usando  $z = t$  como parámetro.
3. Pruebe que todo punto sobre el cono elíptico  $x^2 + y^2 = z^2$  se puede expresar para algún  $\theta \in [0, 2\pi[$  como  $(z \cos \theta, z \sin \theta, z)$  y use esto para parametrizar la curva  $\mathcal{C}$  en términos de  $\theta$ .

**Solución:**

1. Para verificar que la curva  $\mathcal{C}$  se encuentra sobre la esfera  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ , basta con sustituir las ecuaciones de  $\mathcal{C}$  en dicha esfera y la igualdad se debe cumplir, esto es:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 + z^2 &= 1 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 &= 1 \\ \Rightarrow z^2 - 2y + 1 + z^2 &= 1 \quad \text{pues } x^2 + y^2 = z^2. \\ \Rightarrow y - 2y + 1 + y &= 1 \quad \text{pues } y = z^2, \end{aligned}$$

lo cual, evidentemente es verdadero, por lo que la curva  $\mathcal{C}$  se encuentra sobre la esfera dada.

2. Sea  $z(t) = t$ , entonces  $y(t) = t^2$ . Con ello, y la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ , se deduce que

$$x^2 + (t^2)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 = t^2(1 - t^2).$$

Así,  $x(t) = \pm|t|\sqrt{1 - t^2}$ , con  $|t| \leq 1$ , o bien  $t \in [-1, 1]$ . Entonces, una parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  es

$$r(t) = (\pm|t|\sqrt{1 - t^2}, t^2, t).$$

3. Sean  $x = z \cos \theta$  y  $y = z \sin \theta$ , entonces  $(z \cos \theta)^2 + (z \sin \theta)^2 = z^2$ , esto demuestra que todo punto sobre el cono elíptico  $x^2 + y^2 = z^2$  se puede expresar como  $(z \cos \theta, z \sin \theta, z)$  para algún  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Para parametrizar la curva usando este hecho, note que si  $y = z^2$ , entonces

$$\begin{aligned} z \sin \theta &= z^2 \\ \Rightarrow z(\sin \theta - z) &= 0 \\ \Rightarrow z = 0 \quad \text{o} \quad z &= \sin \theta. \end{aligned}$$

Tome  $z = \sin \theta$ , entonces, para  $\theta \in [0, 2\pi[$ , la ecuación paramétrica buscada es

$$r(\theta) = (\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta, \sin \theta).$$

**Observación 2.4** En algunas ocasiones es importante pasar de una curva parametrizada a términos de  $x, y, z$ , es decir, eliminar el parámetro  $t$ . Para comprender este proceso, observe los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.17** Exprese las siguientes curvas parametrizadas como la intersección de dos superficies de la forma

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} .$$

1.  $r(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$ .
2.  $r(t) = (2^t, 2^{t+1}, 0), t \in \mathbb{R}^+$ .
3.  $r(t) = (t^2 - 2, t/3, 0), t \in \mathbb{R}$ .
4.  $r(t) = (3 \cos t, 4 \operatorname{sen} t, \tan t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Solución:**

1. Si  $x = 1 + \cos t$ , entonces  $\cos t = x - 1$ . De forma análoga, si  $z = 1 - \cos t$ , entonces  $\cos t = 1 - z$ , por tanto  $x - 1 = 1 - z$ , es decir,  $x + z = 2$ .  
Luego note que  $xz = 1 - \cos^2 t = \operatorname{sen}^2 t = y^2$ , es decir,  $xz = y^2$ . Así, la curva es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x + z = 2 \\ xz = y^2 \end{cases} .$$

2. Observe que  $\frac{y}{x} = \frac{2^{t+1}}{2^t} = 2$ , es decir,  $y = 2x$ . Con esto, la curva es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} .$$

3. Como  $y = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 3y$ , esto se cambia en  $x = t^2 - 2$ , dando como resultado  $x = 9y^2 - 2$ .  
Entonces la curva es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 9y^2 - 2 \\ z = 0 \end{cases} .$$

4. Sean  $x = 3 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t$  y  $z = \tan t$ . Observe que

$$\frac{3y}{4x} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t = z.$$

## 2.2. Parametrización de una curva

Por tanto se tiene que  $3y = 4xz$ . La otra superficie es

$$\left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{1}{4}y\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cos t\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 4 \sin t\right)^2 = 1.$$

Así, la curva buscada es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ 4xz = 3y \end{cases}.$$

**Ejemplo 2.18** Determine la ecuación del cilindro que tiene como directriz la elipse

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi[$$

y generatriz perpendicular al plano que contiene esta elipse.

**Solución:** Note que primero se debe escribir la curva directriz como la intersección de dos superficies. Fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (\text{Cilindro}) \\ x + y = z & (\text{Plano}) \end{cases}.$$

La elipse es la intersección entre un cilindro de radio 1 centrado en el origen y el plano  $x+y-z=0$ , es decir, dicho plano es el que contiene a la elipse, de esta forma se sigue que  $\vec{u} = (1, 1, -1)$  es el vector director de la generatriz.

Ahora, por la teoría estudiada anteriormente, sea  $P(x, y, z)$  un punto de la generatriz y  $Q(x_0, y_0, z_0)$  el punto de intersección de la generatriz que pasa por  $P$  y la directriz, entonces se tiene que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} x_0 = x + t \\ y_0 = y + t \\ z_0 = z - t \end{cases} \quad (1).$$

Como el punto  $Q$  está en la directriz se cumple que

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ z_0 = x_0 + y_0 \end{cases} \quad (2).$$

Luego, sustituyendo (1) en (2) se tiene que

$$\begin{cases} (x+t)^2 + (y+t)^2 = 1 & (3) \\ z-t = x+t+y+t & (4) \end{cases}.$$

De la ecuación (4) resulta que  $t = \frac{-x-y+z}{3}$  y sustituya este valor en la ecuación (3), al simplificar un poco se obtiene la fórmula del cilindro siguiente:

$$(2x - y + z)^2 + (-x + 2y + z)^2 = 9.$$

**Ejemplo 2.19** Encontrar la superficie de revolución que se genera al girar la curva

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$$

con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , alrededor del eje  $y = z, x = 0$ .

**Solución:** Observe que la curva  $\mathcal{C}$  se puede escribir como:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{(Cilindro)} \\ y - z = 0 & \text{(Plano)} \end{cases} .$$

De acuerdo con la construcción de una ecuación de una superficie de revolución estudiada anteriormente, considere un punto arbitrario  $P(x, y, z)$  de dicha superficie y sea  $Q(x_0, y_0, z_0)$  un punto sobre la curva  $\mathcal{C}$ , de esta forma:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 & (1) \\ y_0 - z_0 = 0 & (2) \end{cases} .$$

Luego, el eje de revolución es  $l : (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(0, 1, 1)$ , de donde se sigue que  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  y  $R(0, 0, 0)$ , entonces:

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = t & (3) \\ y + z = t & (4) \end{cases} .$$

También, la otra ecuación viene dada por

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5).$$

De (2) y (3) se deduce que  $y_0 = z_0 = \frac{t}{2}$ , lo cual se sustituye en (1), obteniendo que  $x_0^2 = \frac{4-t^2}{4}$ . Estos resultados se cambian en (5), como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{4-t^2}{4} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \Rightarrow & 4 - t^2 + 2t^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Rightarrow & 4 + t^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Rightarrow & 4 + (y + z)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{por (4)}. \end{aligned}$$



Esta última ecuación es la fórmula de la superficie de revolución buscada.

## Ejercicios

**Ejercicio 15** Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(t) = (t^2, 3t - 1, t^3 - 2)$ . Determine:

- Los valores de  $t$  tal que  $f(t)$  esté sobre los planos coordenados.
- $f(3) - f(2)$ .
- $f(1) \cdot f(3)$ .
- $\|f(2)\|f(1)$ .
- $f(1) \times f(-1)$ .
- $f(0) \cdot f(1) \times f(2)$ .

**Ejercicio 16** Parametrice las siguientes curvas. En los ejercicios (2), (3) y (6) use una parametrización trigonométrica.

- $\mathcal{C} : \begin{cases} 7x - 2y + z = 1 \\ 3x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$
- $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$
- $\mathcal{C} : \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y \end{cases}$
- $\mathcal{C} : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y^2 \end{cases}$
- $\mathcal{C} : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z + 5 = (x - 2)^2 + 2y^2 \end{cases}$
- $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

**Ejercicio 17** Considere la curva  $\mathcal{C}$  de intersección entre el cilindro  $y^2 + z^2 = 9$  y el plano  $3x - 10z = 0$ . Halle una parametrización trigonométrica de  $\mathcal{C}$  denotada por  $r(t)$ , luego encuentre un punto sobre dicha curva tal que  $\|r'(t)\| = 3$ .

**Ejercicio 18** Parametrizar los siguientes segmentos de recta, dado su punto inicial y punto final respectivamente.

- $A(1, 0, 2)$  y  $B(3, 4, 1)$ .
- $A(-1, 3, 0)$  y  $B(0, -2, 1)$ .

**Ejercicio 19** Escriba las siguientes curvas parametrizadas como la intersección de dos superficies.

- $r(t) = (\sqrt{t-1}, t+2, 4t^2+3), t \geq 1$ .
- $r(t) = (1-2\cos t, 3\sin t, \sin t-4\cos t+1), t \in [0, 2\pi]$ .

3.  $r(t) = (\cos^2 t, 3 \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen}^2 t), t \in [0, 2\pi]$ .

4.  $r(t) = (3t + 4, t^2 + t, t - 2t^2), t \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 20** Demuestre que la curva  $r(t) = (a \cos^2 t, \frac{b}{2} \operatorname{sen}^2 t, \frac{c}{2} \operatorname{sen}^2 t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , se encuentra sobre el plano  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

**Ejercicio 21** Demuestre que la curva  $r(t) = (t^2 + t + 1, t^2 - 1, t + 2)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , se encuentra sobre el plano  $x - y - z = 0$ .

**Ejercicio 22** Pruebe que la curva  $r(t) = \left(2 + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{3}}\right)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , se encuentra sobre la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 23** Verifique que la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  con  $x(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$ ,  $y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$  y  $z(t) = a_3 t^2 + b_3 t + c_3$ , cumple con la igualdad

$$\begin{vmatrix} x(t) - c_1 & y(t) - c_2 & z(t) - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Ejercicio 24** Dada la recta parametrizada por  $r(t) = (t + 1, 3t - 2, 2t - 1)$ , halle el punto de dicha recta que está más cerca del origen.

## 2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio

Sea  $\mathcal{C}$  una curva en el espacio con parametrización  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , generalmente  $r(t)$  se interpreta como el vector posición de una partícula que se mueve sobre la curva  $\mathcal{C}$  en el tiempo  $t$ , bajo esta interpretación se dan las siguientes definiciones.

**Definición 2.5 (Vector velocidad, vector aceleración y rapidez)** Sea  $\mathcal{C}$  una curva en el espacio con parametrización  $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , si  $r$  es derivable en  $t = t_0$ , se define el vector velocidad a la curva  $\mathcal{C}$  en  $t = t_0$  como

$$v(t_0) = r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

donde la rapidez de la curva  $r$  en  $t = t_0$  se define como  $\|v(t_0)\|$ . Además, si  $r$  es dos veces derivable en  $t = t_0$ , se define el vector aceleración a la curva  $\mathcal{C}$  en  $t = t_0$  como

$$a(t_0) = r''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)).$$

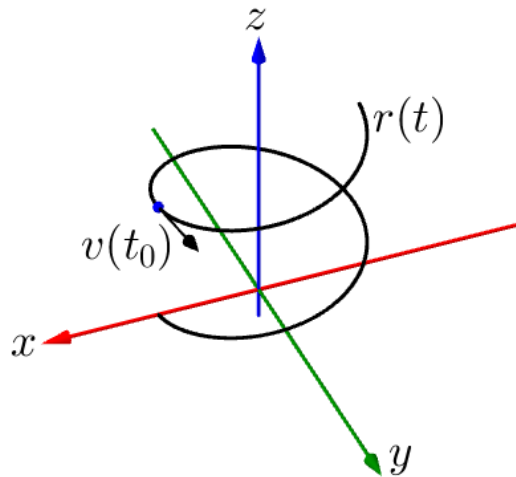


Figura 2.1: Vector velocidad

**Ejemplo 2.20** El vector posición de una partícula es  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ . Determine el vector velocidad y la rapidez con la se mueve la partícula en el punto  $(2, 4, 8)$ .

**Solución:** El vector velocidad está dado por  $v(t) = r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ . Luego, note que en el punto  $(2, 4, 8)$  se tiene que  $t = 2$ , así  $v(2) = (1, 4, 12)$ . También, la rapidez viene dada por  $\|v(2)\| = \sqrt{161}$ .

**Ejemplo 2.21** Considere una partícula que se mueve sobre la curva hélice  $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Determine el vector velocidad, la rapidez y la aceleración que experimenta la partícula en todo momento.

**Solución:**

- La velocidad es  $v(t) = r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ .
- La rapidez es  $\|v(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ .
- La aceleración es  $a(t) = r''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ .

**Definición 2.6 (Longitud de arco)** Sea  $\mathcal{C}$  una curva en el espacio con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $r$  tiene la primera derivada continua. Se define la longitud de  $\mathcal{C}$  sobre  $[a, b]$  como

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|r'(t)\| dt.$$

**Ejemplo 2.22** Determine la longitud de la curva  $\mathcal{C}$  descrita por  $r(t) = (t^2/2, \ln t, \sqrt{2}t)$  desde el punto  $(1/2, 0, \sqrt{2})$  hasta el punto  $(2, \ln 2, 2\sqrt{2})$ .

**Solución:** Primero observe que si  $t = 1$  entonces  $r(1) = (1/2, 0, \sqrt{2})$  y si  $t = 2$  se tiene que  $r(2) = (2, \ln 2, 2\sqrt{2})$ , por tanto  $t \in [1, 2]$ . Con ello, la longitud de arco se calcula a continuación:

### 2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio

$$\begin{aligned}
 L(\mathcal{C}) &= \int_1^2 \|r'(t)\| dt \\
 &= \int_1^2 \|(t, 1/t, \sqrt{2})\| dt \\
 &= \int_1^2 \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2} + 2} dt \\
 &= \int_1^2 \frac{\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}}{t} dt \\
 &= \int_1^2 \frac{\sqrt{(t^2 + 1)^2}}{t} dt \\
 &= \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt \\
 &= \left(\frac{t^2}{2} + \ln t\right) \Big|_{t=1}^{t=2} \\
 &= \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 2,19315.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.23** Determine la longitud de un círculo de radio  $a$  dado por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

**Solución:** Al parametrizar la curva dada se obtiene  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ . Es claro que  $r'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$ , así, la longitud del círculo dado es:

$$\begin{aligned}
 L(\mathcal{C}) &= \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + 0^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} a dt \\
 &= at \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\
 &= 2\pi a,
 \end{aligned}$$

que efectivamente corresponde a la circunferencia de un círculo de radio  $a$ .

**Definición 2.7 (Vector tangente unitario y vector normal unitario)** Sea  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función vectorial con  $r'(t) \neq \vec{0}$ , entonces se define el vector tangente unitario

como

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|},$$

y el vector normal unitario como

$$N(t) = \frac{[r'(t) \times r''(t)] \times r'(t)}{\|[r'(t) \times r''(t)] \times r'(t)\|} = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Ambos vectores son ortogonales, es decir,  $T(t) \cdot N(t) = 0$ , como se puede observar en la figura 2.2.

**Ejemplo 2.24** Sea  $\mathcal{C}$  la curva hélice parametrizada por  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t)$ , halle el vector tangente unitario  $T(t)$  y el vector normal unitario  $N(t)$ .

**Solución:** Observe que  $r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 3)$  y  $\|r'(t)\| = \sqrt{13}$ , entonces

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2 \sin t, 2 \cos t, 3).$$

Luego,  $T'(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2 \cos t, -2 \sin t, 0)$  y  $\|T'(t)\| = \frac{2}{\sqrt{13}}$ , así el vector normal es:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{2}(-2 \cos t, -2 \sin t, 0) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Por último, puede notar que efectivamente  $T(t) \cdot N(t) = 0$ .

**Definición 2.8 (Vector binormal)** El vector binormal a una curva  $\mathcal{C}$  en  $r(t)$  es el vector definido por

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|} = T(t) \times N(t),$$

donde  $T(t)$  y  $N(t)$  son el vector tangente unitario y el vector normal unitario respectivamente, según se observa en la figura 2.2.

### 2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio

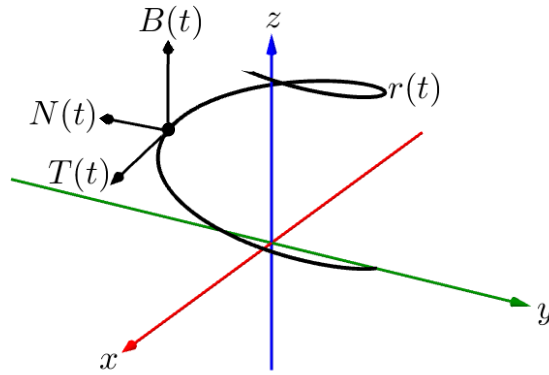


Figura 2.2: Vector tangente unitario, vector normal unitario y vector binormal

**Ejemplo 2.25** Determine el vector binormal para la curva  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t)$  en el punto  $(-2, 0, 3\pi)$ .

**Solución:** Para este caso se tiene que  $t = \pi$  ya que  $r(\pi) = (-2, 0, 3\pi)$ . Por el ejemplo anterior, se tiene que  $T(\pi) = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$  y  $N(\pi) = (1, 0, 0)$ . Entonces, el vector binormal en  $t = \pi$  es

$$B(\pi) = T(\pi) \times N(\pi) = \left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Se puede notar que  $T(\pi) \cdot B(\pi) = 0$  y  $N(\pi) \cdot B(\pi) = 0$ .

**Definición 2.9 (Recta tangente, recta normal y recta binormal)** Sea  $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización de una curva  $\mathcal{C}$  en el espacio y sea  $t_0 \in I$ , entonces:

1. La recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotada por  $l_T$ , es la recta que pasa por  $r(t_0)$  con vector director  $T(t_0)$ .
2. La recta normal a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotada por  $l_N$ , es la recta que pasa por  $r(t_0)$  con vector director  $N(t_0)$ .
3. La recta binormal a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotada por  $l_B$ , es la recta que pasa por  $r(t_0)$  con vector director  $B(t_0)$ .

**Definición 2.10 (Plano osculador, plano normal y plano rectificante)** Sea  $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización de una curva  $\mathcal{C}$  en el espacio y sea  $t_0 \in I$ , entonces:

1. El plano osculador a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotado por  $\pi_O$ , es el plano que pasa por  $r(t_0)$  con vectores directores  $T(t_0)$  y  $N(t_0)$ .
2. El plano normal a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotado por  $\pi_N$ , es el plano que pasa por  $r(t_0)$  con vectores directores  $N(t_0)$  y  $B(t_0)$ .
3. El plano rectificante a  $\mathcal{C}$  en  $r(t_0)$ , denotado por  $\pi_R$ , es el plano que pasa por  $r(t_0)$  con vectores directores  $B(t_0)$  y  $T(t_0)$ .

**Observación 2.5** Si se solicita la ecuación cartesiana  $ax + by + cz = d$  de los planos  $\pi_O, \pi_N$  y  $\pi_R$ , observe que los vectores normales a estos planos son  $B(t), T(t)$  y  $N(t)$ , de forma respectiva.

**Definición 2.11 (Triedro Intrínseco)** Sea  $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización de una curva  $\mathcal{C}$  en el espacio y sea  $t_0 \in I$ . El triedro intrínseco a la curva  $\mathcal{C}$  en el punto  $t_0$  es el triedro trirectángulo cuyos ejes son los vectores tangentes unitarios, normal unitario y binormal, como se aprecia en la figura 2.3.

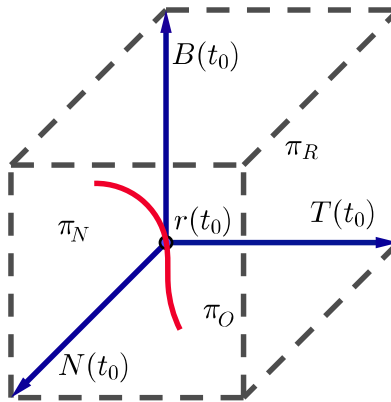


Figura 2.3: Triedro intrínseco

**Observación 2.6** Es importante tener presente los siguientes puntos:

1. A cada punto de la curva le corresponde un triedro intrínseco.
2. En la práctica cuando se solicita el triedro intrínseco de una curva  $\mathcal{C}$  parametrizada, solo se limita a determinar los vectores  $T, N$  y  $B$ .
3. Al triedro intrínseco también se le conoce como Marco de Frenet.



### 2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio

4. El triedro intrínseco posee el plano normal, el plano osculador y el plano rectificante, según lo muestra la figura 2.3.

**Ejemplo 2.26** Determine el vector tangente, el vector normal y el vector binormal en el punto  $(1, 1, 1)$  de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 = z \\ y^2 = z \end{cases} .$$

Luego, a partir de ello, escriba la recta tangente, normal y binormal en su forma vectorial y el plano osculador, normal y rectificante en su forma vectorial, en el mismo punto y para la misma curva.

**Solución:** Al parametrizar la curva  $\mathcal{C}$  (haciendo  $x = t$ ) se tiene que  $r(t) = (t, t, t^2)$ . Es claro que  $t = 1$  ya que  $r(1) = (1, 1, 1)$ . Luego,  $r'(t) = (1, 1, 2t)$ , entonces

$$T(1) = \frac{r'(1)}{\|r'(1)\|} = \frac{(1, 1, 2)}{\|(1, 1, 2)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2).$$

Para determinar  $N(1)$ , primero observe que  $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2+1}}(1, 1, 2t)$ , entonces<sup>1</sup>

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot (2t^2 + 1)^{-3/2} \cdot 4t \cdot (1, 1, 2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2t^2 + 1)^{-1/2} \cdot (0, 0, 2),$$

lo cual se evalúa en  $t = 1$ , esto es:

$$\begin{aligned} T'(1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot (1, 1, 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0, 0, 2) \\ &= \frac{-2}{3\sqrt{6}} \cdot (1, 1, 2) + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot (0, 0, 1) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{6}}(-1, -1, 1). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior se tiene que

$$N(1) = \frac{T'(1)}{\|T'(1)\|} = \frac{\frac{2}{3\sqrt{6}}(-1, -1, 1)}{\frac{2}{3\sqrt{6}}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1).$$

<sup>1</sup>También se pudo haber usado la fórmula  $N(1) = \frac{[r'(1) \times r''(1)] \times r'(1)}{\|[r'(1) \times r''(1)] \times r'(1)\|}$ .

Además, el vector binormal en  $t = 1$  viene dado por:

$$B(1) = T(1) \times N(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Con los datos obtenidos se concluye que la recta tangente, recta normal y recta binormal, respectivamente, son:

- $l_T : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s_1(1, 1, 2)$ , donde  $s_1 \in \mathbb{R}$ .
- $l_N : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s_2(-1, -1, 1)$ , donde  $s_2 \in \mathbb{R}$ .
- $l_B : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s_3(1, -1, 0)$ , donde  $s_3 \in \mathbb{R}$ .

También, la forma vectorial del plano osculador, del plano normal y del plano rectificante, de forma respectiva, son:

- $\pi_O : (x, y, z) = (1, 1, 1) + a_1(1, 1, 2) + b_1(-1, -1, 1)$ , donde  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ .
- $\pi_N : (x, y, z) = (1, 1, 1) + a_2(-1, -1, 1) + b_2(1, -1, 0)$ , donde  $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ .
- $\pi_R : (x, y, z) = (1, 1, 1) + a_3(1, -1, 0) + b_3(1, 1, 2)$ , donde  $a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ .

**Observación 2.7** Para el ejemplo anterior, observe que la ecuación cartesiana del plano osculador, del plano normal y del plano rectificante, respectivamente, tienen la siguiente forma:

- $\pi_O : x - y = 0$ .
- $\pi_N : x + y + 2z = 4$ .
- $\pi_R : -x - y + z = -1$ .

**Ejemplo 2.27** Hallar la ecuación del plano normal a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = y \end{cases},$$

en el punto  $P(1, 1, 2)$ . Haga un dibujo que muestre ambas superficies y la curva  $\mathcal{C}$ .

### 2.3. Interpretación de una curva parametrizada en el espacio

**Solución:** Para parametrizar la curva  $\mathcal{C}$ , sea  $x = t$ , entonces  $y = t$  y  $z = 2t^2$ , es decir, la curva dada se puede parametrizar como  $r(t) = (t, t, 2t^2)$ . Además, note que  $t = 1$  pues  $r(1) = (1, 1, 2)$ . Como no se solicita algún tipo de ecuación específica del plano normal, se va a hallar la ecuación cartesiana, con base en ello basta determinar la dirección de  $T(1)$ , sin necesidad de normalizarlo.

Luego,  $r'(t) = (1, 1, 4t)$ , de donde  $r'(1) = (1, 1, 4)$ . Entonces el vector tangente  $T(1)$  tiene dirección  $(1, 1, 4)$ . Por tanto, la ecuación cartesiana del plano normal es  $\pi_N : x + y + 4z = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10$ , es decir:

$$\pi_N : x + y + 4z = 10.$$

Un dibujo aproximado de la curva  $\mathcal{C}$  se aprecia en la figura 2.4.

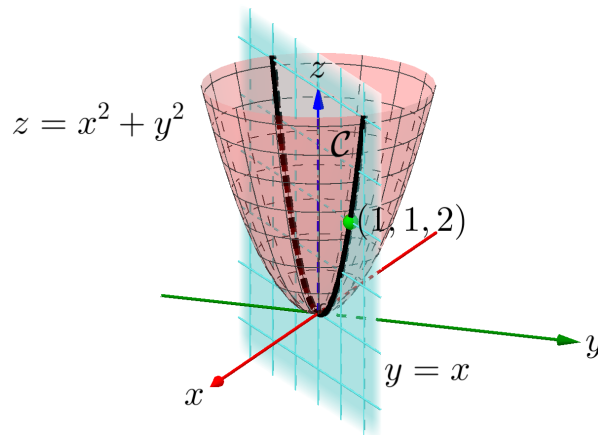


Figura 2.4: Curva  $\mathcal{C}$  formada por la intersección del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $x = y$

**Ejemplo 2.28** Dada la curva  $\mathcal{C} : r(t) = (2 \cos^2 t, 2 \cos t \sin t, 2 \sin t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

1. Determine la ecuación cartesiana del plano normal a  $\mathcal{C}$  en el punto  $(1, 1, \sqrt{2})$ .
2. Compruebe que la curva  $\mathcal{C}$  está contenida en el cilindro  $S_1 : x^2 + y^2 = 2x$  y también en la esfera  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
3. Sabiendo que la curva está contenida en el cilindro  $S_1 : x^2 + y^2 = 2x$ , halle otra parametrización de la curva  $\mathcal{C}$ .

**Solución:**

1. Observe que  $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1, 1, \sqrt{2})$ , así se tiene que  $t = \frac{\pi}{4}$ . De forma similar al ejemplo anterior, se debe hallar la dirección de  $T\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , sin necesidad de normalizarlo. Así,  $r'(t) = (-4 \cos t \sin t, 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t, 2 \cos t)$ , de donde  $r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-2, 0, \sqrt{2})$ . Con ello el vector tangente  $T\left(\frac{\pi}{4}\right)$  tiene dirección  $(-2, 0, \sqrt{2})$  y la ecuación cartesiana del plano normal buscada es  $\pi_N : -2x + \sqrt{2}z = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ , es decir:

$$\pi_N : -2x + \sqrt{2}z = 0.$$

2. Basta probar que la curva dada por  $\mathcal{C} : r(t) = (2 \cos^2 t, 2 \cos t \sin t, 2 \sin t)$  cumple con las ecuaciones de  $S_1$  y  $S_2$  para cada  $t \in [0, 2\pi]$ . En efecto, en el cilindro  $S_1 : x^2 + y^2 = 2x$  se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 \cos^2 t)^2 + (2 \cos t \sin t)^2 \\ &= 4 \cos^4 t + 4 \cos^2 t \sin^2 t \\ &= 4 \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 4 \cos^2 t \\ &= 2x. \end{aligned}$$

De forma análoga, para la esfera  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$  se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x^2 + y^2) + z^2 \\ &= 4 \cos^2 t + (2 \sin t)^2 \\ &= 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t \\ &= 4. \end{aligned}$$

3. Por la parte anterior de este ejercicio se deduce que la curva  $\mathcal{C}$  es la intersección del cilindro  $S_1 : x^2 + y^2 = 2x$  con la esfera  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , es decir

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases},$$

Al completar cuadrados en la ecuación del cilindro se obtiene que  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , lo que induce tomar  $x - 1 = \cos t \Rightarrow x(t) = 1 + \cos t$  y tomar  $y(t) = \sin t$ . Estos dos últimos resultados se cambian en la ecuación de la esfera y se obtiene  $z(t)$ , esto es,

$$(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t + z^2 = 4 \Rightarrow z(t) = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Finalmente, otra parametrización para la curva  $\mathcal{C}$  es

$$r(t) = (1 + \cos t, \sin t, \sqrt{2 - 2 \cos t}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

## 2.4. Curvatura y torsión

La curvatura es una medida del cambio de dirección del vector tangente a una curva  $\mathcal{C}$ , así, cuanto más rápido cambia el vector tangente a medida que se desplaza a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura. La torsión es una medida del cambio de dirección del vector binormal, en este sentido, cuanto más rápido cambia la torsión, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva.

**Definición 2.12 (Curvatura, círculo osculador, torsión)** Sea  $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización de una curva  $\mathcal{C}$  en el espacio que admite segunda derivada, entonces:

1. La curvatura de  $\mathcal{C}$  en el punto  $r(t_0)$  se define

$$\kappa(t_0) = \frac{\|r'(t_0) \times r''(t_0)\|}{\|r'(t_0)\|^3}.$$

2. El círculo osculador de  $\mathcal{C}$  en el punto  $r(t_0)$  es el círculo que pasa por  $r(t_0)$  con radio  $\rho = \frac{1}{\kappa(t_0)}$  y centro en el punto  $C(t_0) = r(t_0) + \rho N(t_0)$  (ver figura 2.5).

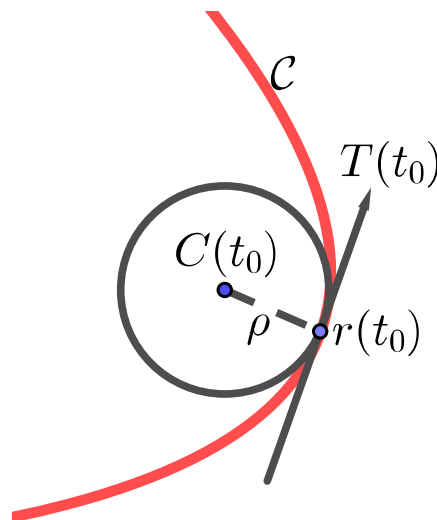


Figura 2.5: Círculo osculador

3. Si  $r$  admite tercera derivada, la torsión de la curva en el punto  $r(t_0)$  se define

$$\tau(t) = \frac{[r'(t_0) \times r''(t_0)] \cdot r'''(t_0)}{\|r'(t_0) \times r''(t_0)\|^2}.$$

**Observación 2.8** Sobre la definición anterior se debe valorar que:

1. El círculo osculador siempre está sobre el plano osculador y su radio  $\rho$  se denomina radio de curvatura.
2. Una fórmula alternativa para calcular la torsión es

$$\tau(t) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2},$$

donde  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  y los vectores  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  son el vector velocidad y el vector aceleración respectivamente.

3. Si la torsión de una curva es diferente de cero entonces es una **curva alabeada**, de lo contrario será una **curva plana** o simplemente una **curva no alabeada**, que precisamente son curvas contenidas enteramente sobre un plano. En este sentido, si una curva  $\mathcal{C}$  es plana, entonces el plano que contiene dicha curva es a la vez el plano osculador en todo punto de  $\mathcal{C}$ .
4. En  $\mathbb{R}^2$ , si  $y = f(x)$  es una función real de variable real, entonces la curvatura en el punto  $(x, y)$  se define como

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Si la curva está parametrizada de la forma  $r(t) = (x(t), y(t))$  con  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , se usa la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}.$$

## 2.4. Curvatura y torsión

**Ejemplo 2.29** Determine la curvatura de la parábola  $y = x^2$  para cualquier punto  $(x, y)$ .

**Solución:** Usando el punto cuatro de la observación 2.8 no es difícil concluir que  $\kappa(x) = \frac{2}{[1 + 4x^2]^{3/2}}$  es la curvatura de la parábola dada en cualquier punto  $(x, y)$ .

**Ejemplo 2.30** Considere la curva  $y = e^{ax}$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Calcule todos los valores de  $a$  para los cuales la curvatura de esta curva, en  $x = 0$ , tiene máximo valor.

**Solución:** Por el punto cuatro de la observación 2.8 se tiene que la curvatura viene dada por

$$\kappa(x) = \frac{a^2 e^{ax}}{[1 + a^2 e^{2ax}]^{3/2}}.$$

Al evaluar en  $x = 0$  resulta que  $\kappa(0) = \frac{a^2}{(1 + a^2)^{3/2}}$ , con ello defina la función real de variable real

$$f(a) = \frac{a^2}{(1 + a^2)^{3/2}},$$

de la cual se va determinar sus valores máximos usando el criterio de la primera derivada. Para ello, note que

$$f'(a) = \frac{a(2 - a^2)}{(1 + a^2)^{5/2}} = \frac{a(\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a)}{(1 + a^2)^{5/2}}.$$

Es claro que los números críticos son  $a = 0$  y  $a = \pm\sqrt{2}$ . La tabla de monotonía viene dada por

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$a$	-	-	+	+	+
$\sqrt{2} - a$	+	+	+	-	-
$\sqrt{2} + a$	-	-	+	+	+
$f'(a)$	+	-	+	-	-
$f(a)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Según la tabla anterior la curvatura es máxima cuando  $a = \pm\sqrt{2}$ .

**Ejemplo 2.31** Sea  $\mathcal{C} : r(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin^2 t)$ . Determine la curvatura, la torsión y la ecuación del círculo osculador en el punto  $(1/2, 1/2, 1/2)$ .

**Solución:** Dado que  $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1/2, 1/2, 1/2)$ , tome  $t = \frac{\pi}{4}$ . Luego:

- Para la curvatura, observe que  $r'(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), \sin(2t))$  y que  $r''(t) = (-2\cos(2t), -2\sin(2t), 2\cos(2t))$ . Entonces:

$$\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\|r'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times r''\left(\frac{\pi}{4}\right)\|}{\|r'\left(\frac{\pi}{4}\right)\|^3} = \frac{\|(-1, 0, 1) \times (0, -2, 0)\|}{\|(-1, 0, 1)\|^3} = \frac{\|(2, 0, 2)\|}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1.$$

- Para la torsión, primero se calcula  $r'''(t) = (4\sin(2t), -4\cos(2t), -4\sin(2t))$ , así:

$$\tau\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(r'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times r''\left(\frac{\pi}{4}\right)) \cdot r'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\|r'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times r''\left(\frac{\pi}{4}\right)\|^2} = \frac{(2, 0, 2) \cdot (4, 0, -4)}{\|(2, 0, 2)\|^2} = \frac{0}{(2\sqrt{2})^2} = 0.$$

Con este dato, y según el punto tres de la observación 2.8, la curva  $\mathcal{C}$  es plana.

- Para el círculo osculador, note que el radio es  $\rho = \frac{1}{\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1} = 1$ . Además, el centro está dado por la fórmula

$$C\left(\frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{\pi}{4}\right) + \rho N\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Para el lector queda el cálculo de  $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$  y  $N\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, -1, 0)$ . Con esta información se determina que

$$C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 1 \cdot (0, -1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

En este sentido, la esfera que contiene el círculo osculador es

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2.$$

Para obtener el círculo osculador, se necesita intersecar la esfera con el plano osculador, para cuya ecuación cartesiana se necesita la dirección del vector binormal en  $t = \frac{\pi}{4}$ , esto es:

$$B\left(\frac{\pi}{4}\right) = T\left(\frac{\pi}{4}\right) \times N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Con ello, y considerando que el plano osculador pasa por el punto  $(1/2, 1/2, 1/2)$ , se tiene que la ecuación cartesiana del plano osculador es  $\pi_O : x + z = 1$ . Por último,



## 2.4. Curvatura y torsión

el círculo osculador en su forma cartesiana estaría dado por:

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} .$$

Otra forma de haber obtenido el plano osculador es deducir que la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (\cos^2 t, \sen t \cos t, \sen^2 t)$ , en su forma cartesiana es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x + z = 1 \\ y^2 = xz \end{cases} .$$

Dado que la curva es plana ya que la torsión es nula, y por el punto tres de la observación 2.8, el plano osculador debe ser  $x + z = 1$ .

**Ejemplo 2.32** Determine la curvatura y la ecuación del círculo osculador en el punto  $(1, 1, 1)$  de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 = z \\ y^2 = z \end{cases} .$$

encuentre la función vectorial  $r(t)$  que describe la curva  $\mathcal{C}$ .

**Solución:** Note que es la misma curva del ejemplo 2.26, donde se toma  $x = t$  para paramerizarla, obteniendo la ecuación  $r(t) = (t, t, t^2)$ . Además, observe que  $t = 1$ . Luego,

$$\begin{aligned} r'(t) &= (1, 1, 2t) \\ r''(t) &= (0, 0, 2) \end{aligned} .$$

Con esa información se tiene que la curvatura es

$$\kappa(1) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|^3} = \frac{\|(1, 1, 2) \times (0, 0, 2)\|}{\|(1, 1, 2)\|^3} = \frac{\|(2, -2, 0)\|}{6\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} .$$

En cuanto al círculo osculador el radio de curvatura es  $\rho = \frac{1}{\kappa(1)} = 3\sqrt{3}$ . Además, el centro de curvatura es

$$C(1) = r(1) + \rho N(1) = (1, 1, 1) + 3\sqrt{3} \left( \frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = (0, 0, 2) .$$

Entonces la esfera que contiene al círculo osculador es  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$ . Posteriormente, se determina que la ecuación del plano osculador es  $x - y = 0$ , por tanto la

forma cartesiana de la fórmula del círculo osculador corresponde a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

**Ejemplo 2.33** Considere la cúbica trenzada

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y = x^2 \\ z = \frac{2}{3}x^3 \end{cases},$$

encuentre la función vectorial  $r(t)$  que describe la curva  $\mathcal{C}$ , luego muestre que la curvatura y la torsión son iguales en todo punto.

**Solución:** Sea  $x = t$ , entonces la parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  es  $r(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ , cuyas primeras tres derivadas son

$$\begin{aligned} r'(t) &= (1, 2t, 2t^2) \\ r''(t) &= (0, 2, 4t) \\ r'''(t) &= (0, 0, 4) \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{array} \right\|}{\|(1, 2t, 2t^2)\|^3} = \frac{\|(4t^2, -4t, 2)\|}{\|(1, 2t, 2t^2)\|^3} = \frac{2}{(2t^2 + 1)^2}.$$

Por otro lado, se cumple que

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{(4t^2, -4t, 2) \cdot (0, 0, 4)}{\|(4t^2, -4t, 2)\|^2} = \frac{8}{16t^4 + 16t^2 + 4} = \frac{2}{(2t^2 + 1)^2}.$$

Se puede observar que la fórmula de la curvatura y la torsión son iguales para cualquier punto, lo que permite culminar con el ejemplo.

**Ejemplo 2.34** Determine la curvatura de la hélice  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  con  $a$  y  $b$  números no negativos.

**Solución:** Las primeras dos derivadas de  $r(t)$  son:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t, b) \\ r''(t) &= (-a \operatorname{cos} t, -a \operatorname{sen} t, 0). \end{aligned}$$

Para el lector queda verificar que  $r'(t) \times r''(t) = (ab \operatorname{sen} t, -ab \operatorname{cos} t, a^2)$  y por tanto

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 b^2 \operatorname{cos}^2 t + a^4} = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Además se cumple que

$$\|r'(t)\|^3 = \left(\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{cos}^2 t + b^2}\right)^3 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3 = (a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por último, la curvatura de la hélice viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

**Ejemplo 2.35** Considere la curva  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  con  $a > b$ .

1. Parametrice dicha curva usando coordenadas polares.
2. Muestre que la función de curvatura para esta curva es

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t)^{3/2}}.$$

3. Determine los puntos de mayor y menor curvatura sobre la elipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Solución:**

1. Tome  $x(t) = a \operatorname{cos} t, y = b \operatorname{sen} t$  y  $z = 0$ , entonces la curva  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  parametrizada corresponde a

$$r(t) = (a \operatorname{cos} t, b \operatorname{sen} t, 0),$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ .

2. Las primeras dos derivadas de  $r(t)$  son:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, b \operatorname{cos} t, 0) \\ r''(t) &= (-a \operatorname{cos} t, -b \operatorname{sen} t, 0). \end{aligned}$$

Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \operatorname{sen} t & b \operatorname{cos} t & 0 \\ -a \operatorname{cos} t & -b \operatorname{sen} t & 0 \end{array} \right\|}{\|(-a \operatorname{sen} t, b \operatorname{cos} t, 0)\|^3} = \frac{\|(0, 0, ab \operatorname{sen}^2 t + ab \operatorname{cos}^2 t)\|}{\|(-a \operatorname{sen} t, b \operatorname{cos} t, 0)\|^3} \\ &= \frac{\|(0, 0, ab)\|}{\|(-a \operatorname{sen} t, b \operatorname{cos} t, 0)\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t)^{3/2}}, \end{aligned}$$

demostrando lo solicitado.

3. Para la elipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , note que  $a^2 = 9$  y  $b^2 = 4$ , y usando el resultado anterior, la función de curvatura de dicha elipse viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{6}{(9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t)^{3/2}},$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ . Se va determinar los máximos y mínimos de esta función usando el criterio de la primera derivada para funciones reales de variable real. Para ello, note que

$$\kappa'(t) = \frac{-90 \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t}{(9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t)^{5/2}}.$$

Observe que  $(9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{cos}^2 t)^{5/2} > 0$ , entonces los únicos puntos críticos en el intervalo  $[0, 2\pi]$  ocurren al hacer  $-90 \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t = 0$ , es decir, cuando  $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ . La tabla de monotonía está dada por

	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$
-90	-	-	-	-	-	-	-
$\operatorname{sen} t$	-	+	+	-	-	+	+
$\operatorname{cos} t$	+	+	-	-	+	+	+
$\kappa'(t)$	+	-	+	-	+	-	-
$\kappa(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Según la tabla anterior, la curvatura es máxima cuando  $t \in \{0, \pi, 2\pi\}$  y es mínima cuando  $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ .

**Ejemplo 2.36** Considere la curva parametrizada por  $r(t) = (-\sin t, \cos t, 4 \cos t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

1. Determine los dos puntos en el intervalo  $[0, 2\pi]$  donde la curvatura de dicha curva es mínima y verifique que esos dos puntos evaluados en la curvatura tienen el mismo valor.
2. Escriba la curva que representa  $r(t) = (-\sin t, \cos t, 4 \cos t)$  como la intersección de dos superficies.

**Solución:**

1. Las primeras dos derivadas de  $r(t)$  son:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-\cos t, -\sin t, -4 \sin t) \\ r''(t) &= (\sin t, -\cos t, -4 \cos t). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos t & -\sin t & -4 \sin t \\ \sin t & -\cos t & -4 \cos t \end{array} \right\|}{\|(-\cos t, -\sin t, -4 \sin t)\|^3} = \frac{\sqrt{17}}{\left(\sqrt{1 + 16 \sin^2 t}\right)^3}.$$

Ahora, se va obtener los mínimos en el intervalo  $[0, 2\pi]$  de la función curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{17}}{(1 + 16 \sin^2 t)^{3/2}}, \text{ para lo cual observe que}$$

$$\kappa'(t) = \frac{-48\sqrt{17} \sin t \cos t}{(1 + 16 \sin^2 t)^{5/2}}.$$

Dado que  $(1 + 16 \sin^2 t)^{5/2} > 0$ , los puntos críticos en el intervalo  $[0, 2\pi[$  ocurren cuando  $-48\sqrt{17} \sin t \cos t = 0$ , que por el ejemplo 2.35 es cuando  $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ . Usando el criterio de la primera derivada se concluye que la curvatura es mínima cuando  $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ .

Luego es claro que  $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{17}$ .

2. Tome  $x = -\sin t$ ,  $y = \cos t$  y  $z = 4 \cos t$ , de esta forma induzca que  $x^2 + y^2 = 1$ . Además, la otra superficie es  $y = \frac{z}{4}$ , con lo cual la curva buscada es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases}.$$

## 2.5. Parametrización por longitud de arco

**Definición 2.13 (Función de longitud de arco)** Sea  $\mathcal{C}$  una curva con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la función de longitud de arco se define como

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du.$$

**Observación 2.9** La longitud de arco puede ser usado como un parámetro reescribiendo el parámetro  $t$  en términos del parámetro  $s$ , esta nueva parametrización puede ser más adecuada para estudiar el conjunto de propiedades geométricas de una curva. Se llamará a este proceso reparametrización de la curva por longitud de arco y se denotará por  $r(s)$ . Asimismo, la reparametrización por longitud de arco simplifica significativamente los cálculos de las componentes del triedro intrínscico.

**Ejemplo 2.37** Sea  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (\cos(3t), \sen(3t), 4t)$ . Halle una reparametrización por longitud de arco.

**Solución:** Observe que  $r'(t) = (-3\sen(3t), 3\cos(3t), 4)$ . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|r'(u)\| du \\ &= \int_0^t \sqrt{9\sen^2(3u) + 9\cos^2(3u) + 16} du \\ &= \int_0^t 5 du \\ &= 5t. \end{aligned}$$

De esta forma tome  $s = 5t$ , esto implica a su vez que  $t = \frac{s}{5}$ . Así, la reparametrización de la curva por longitud de arco es

$$r(s) = \left( \cos\left(\frac{3s}{5}\right), \sen\left(\frac{3s}{5}\right), \frac{4s}{5} \right).$$

**Ejemplo 2.38** Sea  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (a\cos t, a\sen t, bt)$ . Halle una reparametrización por longitud de arco.

**Solución:** La derivada de  $r(t)$  es  $r'(t) = (-a\sen t, a\cos t, b)$ . Entonces:

## 2.5. Parametrización por longitud de arco

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \|r'(u)\| du \\
 &= \int_0^t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 u + a^2 \operatorname{cos}^2 u + b^2} du \\
 &= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du \\
 &= t\sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Con ello  $s = t\sqrt{a^2 + b^2}$ , con lo cual se deduce que  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Entonces la reparametrización de la curva por longitud de arco es

$$r(s) = \left( a \operatorname{cos} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

**Observación 2.10** Para una curva reparametrizada por longitud de arco  $r(s)$ , se tiene que:

1. El vector tangente unitario en el punto  $r(s_0)$  es  $T(s_0) = r'(s_0)$ .
2. La curvatura en el punto  $r(s_0)$  es  $\kappa(s_0) = \|r''(s_0)\|$ .
3. El vector normal unitario en el punto  $r(s_0)$  es  $N(s_0) = \frac{r''(s_0)}{\kappa(s_0)}$ .
4. El vector binormal en el punto  $r(s_0)$  es  $B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0)$ .

**Ejemplo 2.39** Usando reparametrización por longitud de arco, verifique que una recta en  $\mathbb{R}^3$  tiene curvatura igual a cero.

**Solución:** Suponga que la recta pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y tiene vector director  $(a, b, c)$ , entonces la recta se parametriza como  $r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \|r'(u)\| du \\
 &= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} du \\
 &= t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.
 \end{aligned}$$

De modo que  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ , con lo cual la reparametrización por longitud de arco de la curva es

$$r(s) = \left( x_0 + \frac{as}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y_0 + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z_0 + \frac{cs}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right).$$

Luego, por la observación 2.10, la curvatura está dada por

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \|r''(s)\| \\ &= \|(0, 0, 0)\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

**Teorema 2.4** Sea  $P$  una partícula con posición  $r(t)$  en el tiempo  $t$  y sea  $s = s(t)$  el parámetro de longitud de arco. Entonces

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot T(s) + \kappa \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot N(s)$$

donde  $a_T = \frac{d^2s}{dt^2}$  es el componente tangencial de la aceleración y  $a_N = \kappa \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$  es el componente normal de la aceleración.

**Teorema 2.5** Sea  $P$  una partícula con posición  $r(t)$  en el tiempo  $t$ , el componente tangencial de la aceleración de la partícula en el tiempo  $t$  está dado por

$$a_T(t) = \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{\|r'(t)\|} = a(t) \cdot T(t),$$

y el componente normal de la aceleración de la partícula en el tiempo  $t$  está dado por

$$a_N(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|} = a(t) \cdot N(t).$$

**Ejemplo 2.40** El vector de posición de una partícula en el tiempo  $t$  (en segundos) es  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ , halle  $a_T(t)$  y  $a_N(t)$  para todo momento  $t$ .

**Solución:** Las primeras dos derivadas de  $r(t)$  son

$$\begin{aligned}r'(t) &= (1, 2t, 3t^2) \\ r''(t) &= (0, 2, 6t)\end{aligned}$$



## 2.5. Parametrización por longitud de arco

Por el teorema 2.5 se tiene que el componente tangencial de aceleración es

$$\begin{aligned} a_T(t) &= \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{\|r'(t)\|} \\ &= \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}. \end{aligned}$$

Además, por el mismo teorema 2.5 el componente normal de aceleración es

$$\begin{aligned} a_N(t) &= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|} \\ &= \frac{\|(6t^2, -6t, 2)\|}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} \\ &= \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.41** El vector de posición de una partícula en el tiempo  $t$  (en segundos) es  $r(t) = (\ln(t), \sqrt{2}t, t^2/2)$ , halle  $a_T(t)$  y  $a_N(t)$  en el punto  $(0, \sqrt{2}, 1/2)$ .

**Solución:** Observe que  $t = 1$  y además que:

$$\begin{aligned} r'(t) &= (1/t, \sqrt{2}, t) \Rightarrow r'(1) = (1, \sqrt{2}, 1) \\ r''(t) &= (-1/t^2, 0, 1) \Rightarrow r''(1) = (-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Luego, no es difícil concluir que

$$a_T(t) = \frac{r'(1) \cdot r''(1)}{\|r'(1)\|} = \frac{0}{2} = 0,$$

y que además

$$a_N(t) = \frac{\|r'(1) \times r''(1)\|}{\|r'(1)\|} = \frac{\|(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})\|}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

## Ejercicios

**Ejercicio 25** Una partícula se mueve con la función de posición  $r(t) = (\sqrt{2}t^2, e^{2t}, e^{-2t})$ . Halle la velocidad, la rapidez y la aceleración de la partícula.

**Ejercicio 26** Una partícula se mueve con la función de posición  $r(t) = (\sqrt{t+1}, 2t, 1-t)$  con  $t \in [0, 5]$ . Halle la velocidad y la rapidez en el punto  $P(\sqrt{5}, 8, -3)$ .

**Ejercicio 27** Considere la curva  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$  con  $a$  y  $b$  constantes positivas. Muestre que  $r(t)$  es perpendicular a  $v(t)$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$  si y solo si  $a = b$ .

**Ejercicio 28** Halle el valor de  $t$  para el cual el vector velocidad de la curva  $r(t) = (2t^2 + 1, 3t - 2)$  sea paralelo al vector  $(2, -1)$ .

**Ejercicio 29** Determine los puntos en que el vector velocidad a la curva descrita por  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ , es paralelo al plano  $3x + y + z = 5$ .

**Ejercicio 30** Considere la curva de intersección entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con el plano  $x + z = 0$ . Parametrice dicha curva y halle su longitud de arco.

**Ejercicio 31** Determine la longitud de arco de las siguientes curvas.

1.  $r(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$  con  $t \in [0, 1]$ .
2.  $r(t) = (t + \sin t, 1 + \cos t)$  con  $t \in [0, \pi]$ .

**Ejercicio 32** Considere la curva  $r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por  $r(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 3t)$ , halle el triedro intrínseco.

**Ejercicio 33** Dada la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (1 - t^3, 2t, 3t^2)$ , halle el triedro intrínseco en  $t = 1$ .

**Ejercicio 34** Considere la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $r(t) = (\sqrt{2} \sin t, \cos t, 1 - \cos t)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ .

1. Determine el vector binormal a la curva en el punto  $t = \frac{3\pi}{2}$ .
2. Determine la curvatura de la curva para cualquier punto  $t$  y escriba por qué es el mismo valor para cualquier punto.

**Ejercicio 35** Considere la curva de intersección de los cilindros  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $z^2 + y^2 = 10$ .

1. Determine una parametrización para esta curva. *Sugerencia:* Tome  $y^2 = t$  y establezca un dominio adecuado para este parámetro.

## 2.5. Parametrización por longitud de arco

- Determine las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante a la curva en el punto  $(4, 3, 1)$ .

**Ejercicio 36** Parametrice la curva de intersección de las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ,  $x^2 + y^2 = 2$  y halle las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante a la curva en el punto  $(1, 1, 1)$ .

**Ejercicio 37** Considere la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x \end{cases} .$$

- Determine una parametrización para dicha curva.
- En el punto  $P(1, 1, 2)$ , determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente, la ecuación cartesiana del plano normal y la curvatura.

**Ejercicio 38** Considere la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + z^2 = 2 \end{cases} ,$$

donde  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  y dado el punto  $P(1, 1, 1)$  de la curva  $\mathcal{C}$ .

- Halle una parametrización para dicha curva y determine  $v(t)$  según esta parametrización.
- En el punto  $P$ , determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente y la ecuación cartesiana del plano normal.

**Ejercicio 39** Considere la curva  $\mathcal{C}$  de intersección entre las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y - z = 0$ .

- Halle una parametrización para dicha curva.
- En el punto  $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente y la ecuación cartesiana del plano normal.

**Ejercicio 40** Sea la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (t^3 - 3t^2, t - 4, t^2)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

- Determine el punto de la curva  $\mathcal{C}$  en el que la recta tangente sea paralela a la recta  $x = 5$ ,  $y - 1 = \frac{z}{4}$ .
- Halle el punto de la curva  $\mathcal{C}$  en el que el plano osculador sea paralelo al plano  $x + 3y = 4$ .

**Ejercicio 41** Sea la curva  $\mathcal{C}$  que resulta de la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  y del paraboloides  $y = x^2 + z^2$ .

1. Halle una parametrización trigonométrica para la curva  $\mathcal{C}$ .
2. Considere el punto  $P(1, 2, -1)$  de la curva  $\mathcal{C}$ . Determine los vectores del triedro intrínseco y la curvatura  $\kappa$  en el punto  $P$ .

**Ejercicio 42** Considere la curva parametrizada por  $r(t) = \left(t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}, t^2\right)$ . Determine la curvatura  $\kappa(t)$  y el vector normal  $N(t)$ .

**Ejercicio 43** Dada la curva parametrizada por  $r(t) = \left(t, \frac{t^2}{2} + 1, \frac{t^3}{6}\right)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Determine la curvatura y la ecuación cartesiana del círculo osculador en el punto  $P\left(2, 3, \frac{4}{3}\right)$ .

**Ejercicio 44** Considere la curva parametrizada por  $r(t) = (6t + 2, 6t^2 - 3, 4t^3 + 3)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Halle la ecuación cartesiana del círculo osculador en el punto  $P(2, -3, 3)$ .

**Ejercicio 45** Muestre que la curva  $r(t) = (1 - t^2, t, t^3)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , es alabeada, es decir, mostrar que su torsión es diferente de cero.

**Ejercicio 46** Dada la curva  $r(t) = \left(e^t - 2t, \frac{4e^t}{3} + 4t + \frac{1}{3}, \frac{e^t}{2+4t+4}\right)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Verifique que dicha curva es plana.
2. Compruebe que dicha curva se encuentra sobre el plano  $2x - 3y + 4z = 15$ .
3. Sin necesidad de más cálculos, ¿cuál es la ecuación del plano osculador? Justifique.

**Ejercicio 47** Demuestre que la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$  tiene curvatura y torsión iguales en todos los puntos.

**Ejercicio 48** Demuestre que la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $r(t) = (a \cosh t, a \sinh t, bt)$  tiene curvatura y torsión iguales en todos los puntos, siempre y cuando  $a = b$ .

**Ejercicio 49** Pruebe que el cociente de la curvatura entre la torsión es constante para la curva hélice  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 50** Considere la curva hélice cónica  $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2.5. Parametrización por longitud de arco

1. Muestre que la curva hélice cónica satisface la ecuación del cono  $z^2 = x^2 + y^2$ .
2. Compruebe que el cociente de la curvatura entre la torsión es  $\frac{(t^4 + 5t^2 + 8)^{3/2}}{(t^2 + 6)(t^2 + 2)^{3/2}}$ .

**Ejercicio 51** Considere la curva  $r(t) = \left(2 \cos t + \frac{3}{\sqrt{5}} \sin t, \cos t - \frac{6}{\sqrt{5}} \sin t, 2 \cos t\right)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

1. Calcule los vectores  $T(t)$  y  $N(T)$ .
2. Verifique que  $T(2\pi) \cdot N(0) = 0$ .
3. En el punto  $P(2,1,2)$  calcule el componente tangencial y normal de aceleración.

**Ejercicio 52** Dada la curva  $\mathcal{C} : r(t) = (e^t(\cos t + \sin t), e^t(\sin t - \cos t), e^t)$ . En el punto  $P(1, -1, 1)$  determine:

1. La componente tangencial y la componente normal de aceleración.
2. La curvatura.
3. Los vectores unitarios  $T$ ,  $N$  y  $B$ .

**Ejercicio 53** Considere la curva  $\mathcal{C} : r(t) = \left(\ln t, \sqrt{2}t, \frac{t^2}{2}\right)$  con  $t > 0$ . En el punto  $P(0, \sqrt{2}, 1/2)$  determine:

1. La componente tangencial y la componente normal de aceleración.
2. La curvatura y los vectores unitarios  $T$  y  $N$ .
3. Las ecuaciones paramétricas de la recta binormal.
4. La ecuación cartesiana del plano normal.
5. La ecuación cartesiana del plano rectificante.

**Ejercicio 54** Considere la curva  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por  $r(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$  con  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $t \in \mathbb{R}$ , la cual se denomina espiral logarítmica. Reparametrice esta curva por longitud de arco.

**Ejercicio 55** Obtenga una reparametrización por longitud de arco para la curva dada por  $r(t) = (t, \cosh(t))$  con  $t \in [0, 3]$ .

# Capítulo 3

## Funciones Vectoriales de Variable Vectorial

### 3.1. Funciones de varias variables

**Definición 3.1** (Función de varias variables) Una función de varias variables es una aplicación de la forma  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

donde  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una función vectorial de variable real para  $i = 1, 2, \dots, m$ . En este capítulo, el conjunto  $U$  será un conjunto abierto<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^n$ , según corresponda.

**Ejemplo 3.1** Las siguientes son funciones de varias variables.

1.  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (\ln(xy), \sqrt{x})$ , donde  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ .
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y) = (x^2 + 2y, \sin y, \sqrt{x^2 + y^2})$ .
3.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y, z) = (x + y + z, \sin x \cos z, x + e^{xy-z})$ .
4.  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = \frac{x+y-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ , donde  $U = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ .

---

<sup>1</sup>Intuitivamente,  $U$  es un conjunto abierto si ningún punto de dicho conjunto pertenece también a la frontera de este.

**Observación 3.1** Algunos nombres particulares para una función de varias variables son:

1. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  se llama una función real de variable vectorial, también se le dice campo escalar.
2. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  se llama una función vectorial de variable vectorial, también se le dice campo vectorial.
3. Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  se llama una función vectorial de variable real, que fueron estudiadas en el capítulo anterior.

**Observación 3.2** Las operaciones entre funciones de varias variables se definen de forma similar a como se hace en el caso de funciones de una sola variable. En este sentido, si se tiene que  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se define:

1.  $f + g : U \cap V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $(f + g)(X) = f(X) + g(X)$ .
2.  $fg : U \cap V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $(fg)(X) = f(X)g(X)$ .
3.  $\frac{f}{g} : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$ , donde el conjunto  $W$  está dado por  $W = U \cap V - \{X \in V : g(X) = 0\}$ .

## 3.2. Límites

**Definición 3.2** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función<sup>2</sup>, sea  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$ , se dice que el límite de  $f$  cuando  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tiende a  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  es  $L(l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|f(X) - L\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < \|X - P\| < \delta_\varepsilon \quad (X \in U),$$

y se denota

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L.$$

---

<sup>2</sup>Las normas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  se denotarán igual.

**Teorema 3.1 (Propiedades de los Límites)** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$  tal que  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L_1$  y  $\lim_{X \rightarrow P} g(X) = L_2$ , entonces

1.  $\lim_{X \rightarrow P} (f + g)(X) = L_1 + L_2$ .
2.  $\lim_{X \rightarrow P} (f \cdot g)(X) = L_1 \cdot L_2$ .
3.  $\lim_{X \rightarrow P} \|f(X)\| = \|L_1\|$ .
4. Si  $m = 1$  y  $L_2 \neq 0$   $\lim_{X \rightarrow P} \frac{f}{g}(X) = \frac{L_1}{L_2}$ .
5.  $\lim_{X \rightarrow P} (kf)(X) = kL_1$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.2** Sean  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$ ,  $L(l_1, l_2, \dots, l_m) \in V$  y  $M(m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{R}^k$  tales que  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L$  y  $\lim_{X \rightarrow L} g(X) = M$ , entonces

$$\lim_{X \rightarrow P} g(f(X)) = M.$$

**Ejemplo 3.2** Calcule los siguientes límites.

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2y + e^{xy})$ .
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1)$ .
3.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (3,4,0)} \frac{x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Solución:**

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2y + e^{xy}) = 0^2 \cdot 1 + e^0 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$ .
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1) = \ln(2 \cdot 1 - 1) = \ln 1 = 0$ .
3.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (3,4,0)} \frac{x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(3)^2 - (4)^2 - (0)^2}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (0)^2}} = -\frac{7}{5}$ .



**Teorema 3.3 (Regla de las trayectorias)** Sea la función  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$ , si existen trayectorias (llamados también caminos)  $r_1, r_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  para las cuales

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) = P \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t) = P,$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(r_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(r_2(t)),$$

entonces  $\lim_{X \rightarrow P} f(X)$  no existe.

**Ejemplo 3.3** Use el teorema anterior para mostrar que los siguientes límites no existen.

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{8x^4 + y^2}$ .
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x - y|}$ .

### Solución:

1. De acuerdo con el teorema 3.3 anterior, tome  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  y  $P(0, 0)$ . Considere la trayectoria  $r_1(t) = (t, t)$ , observe que  $\lim_{t \rightarrow 0} r_1(t) = (0, 0)$  y que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

De forma similar, ahora considere la trayectoria  $r_2(t) = (t, 0)$  y note que  $\lim_{t \rightarrow 0} r_2(t) = (0, 0)$ . Luego, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0.$$

Entonces se tendría que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(r_2(t)),$$

y por tanto  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe por el teorema 3.3.

2. Sea  $f(x, y) = \frac{x^2y}{8x^4 + y^2}$  y  $P(0, 0)$ . Considere el camino  $r_1(t) = (t, t^2)$  y note que  $\lim_{t \rightarrow 0} r_1(t) = (0, 0)$ . Luego

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{9t^4} = \frac{1}{9}.$$

Ahora considere el camino  $r_2(t) = (0, t)$  y observe que  $\lim_{t \rightarrow 0} r_2(t) = (0, 0)$ . Con ello se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{8 \cdot 0 + t^2} = 0.$$

Entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  no existe por el teorema 3.3.

3. Tome  $f(x,y) = \frac{x^2}{|x-y|}$  y  $P(0,0)$ . Ahora, considere el camino  $r_1(t) = (t, t - t^2)$  y observe que  $\lim_{t \rightarrow 0} r_1(t) = (0,0)$ . Con ello

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t - t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{|t - t + t^2|} = 1.$$

Similarmente, sea el camino  $r_2(t) = (t, t - t^3)$  donde  $\lim_{t \rightarrow 0} r_2(t) = (0,0)$ . Así,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(r_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t - t^3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{|t - t + t^3|} = +\infty.$$

Entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  no existe por el teorema 3.3.

**Observación 3.3** En ocasiones es posible calcular el límite de una función de **dos** variables, cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , mediante el cambio a coordenadas polares. En ese caso se hace la sustitución:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Luego, decir que  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  equivale a decir que (en coordenadas polares)  $r \rightarrow 0$  (independientemente del valor de  $\theta$ ). Entonces, en algunas casos, cuando el límite es independiente del valor de  $\theta$  se puede obtener su valor. Cuando el límite depende de  $\theta$  entonces puede resultar que dicho límite no exista.

**Ejemplo 3.4** Estudie el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^4y}{x^4 + y^4}$  mediante su cambio a coordenadas polares.

**Solución:** Al hacer la sustitución de coordenadas polares dada en la observación 3.3 se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^4y}{x^4 + y^4} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6(r \cos \theta)^4(r \operatorname{sen} \theta)}{(r \cos \theta)^4 + (r \operatorname{sen} \theta)^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6r^5 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta}{r^4(\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta)} \\ &= \frac{\cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta}{\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta} \lim_{r \rightarrow 0} 6r \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma se puede concluir que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^4y}{x^4 + y^4} = 0$ .

**Ejemplo 3.5** Estudie el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  mediante su cambio a coordenadas polares.

Al hacer la sustitución de coordenadas polares se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

En este caso, al haber desaparecido la variable  $r$ , el valor del límite depende únicamente del valor de  $\theta$  y, por lo tanto, es probable que este límite no exista. Para mostrarlo, use el teorema 3.3, tomando las trayectorias  $r_1(t) = (t, 0)$  y  $r_2(t) = (0, t)$ .

## 3.3. Continuidad

**Definición 3.3 (Continuidad en un punto).** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función en varias variables, se dice que  $f$  es continua en  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$  si

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = f(P).$$

Además, se dice que una función es continua si es continua en cada punto de su dominio.

**Teorema 3.4** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dos funciones continuas en  $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$ , entonces:

1.  $f + g$  es continua en  $P$ .
2.  $f \cdot g$  es continua en  $P$ .
3.  $\|f\|$  es continua en  $P$ .
4.  $\frac{f}{g}$  es continua en  $P$ , si  $m = 1$  y  $g(P) \neq 0$ .
5.  $kf$  es continua en  $P$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.5** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  y sea  $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  tales que  $f$  es continua en  $P \in U$  y  $g$  es continua en  $f(P) \in V$ , entonces  $g \circ f$  es continua en  $P \in U$ .

**Ejemplo 3.6** Analice la continuidad de las siguientes funciones.

1.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .
2.  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ .
3.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

**Solución:**

1. En este caso se debe analizar la continuidad en  $P(0, 0)$ . Observe que  $f(0, 0) = 0$  (está definido). Sin embargo, al considerar las trayectorias dadas por  $r_1(t) = (t, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0)$ , se puede concluir que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe. Consecuentemente dicha función  $f$  no es continua en  $P(0, 0)$ , es decir, es continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .
2. Observe que  $1 + xy > 0$ , entonces  $f$  es continua en el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$ .
3. Al analizar la continuidad en el punto  $P(0, 0)$ , note que  $f(0, 0) = 1$ , por lo que está definida. Luego observe que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

En conclusión, la función  $f(x, y)$  es continua en  $P(0, 0)$  y así  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

## Ejercicios

**Ejercicio 56** Use la regla de las trayectorias para verificar que los límites dados a continuación no existen.

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}.$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

$$4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^4}{x^5 + 7y^5}.$$

$$5. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}.$$

$$6. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}.$$

$$7. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}.$$

$$8. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2}.$$

$$9. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x + y + z}{x + y - z}.$$

$$10. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 z^3 y}{x^6 + z^6}.$$

**Ejercicio 57** Haciendo uso de las coordenadas polares concluya que los siguientes límites tienden a 0.

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}.$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^3 y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2 y^2}{3x^2 + 3y^2}.$$

$$4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^4}{x^4 + 3y^4}.$$

**Ejercicio 58** Analice las continuidades de las siguientes funciones.

$$1. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

$$3. f(x, y) = \frac{x + y^5}{x^2 + y^2 + 1}.$$

$$4. f(x, y) = \cos x + \cos y.$$

$$5. f(x, y) = \frac{\cos x}{\sin y}.$$

$$6. f(x, y) = \cos^2(x^3 \operatorname{sen}^4 y).$$

$$7. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + 3y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$8. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - 3y^4}{x^4 + 5y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$9. f(x, y) = \begin{cases} \frac{6x^3 y^3}{x^4 + 7y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

## 3.4. Diferenciabilidad

### 3.4.1. Derivadas Parciales

**Definición 3.4 (Derivadas parciales).** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto. Entonces la derivada parcial de  $f$  con respecto a la variable  $x_i$  en el punto  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , denotada  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X + he_i) - f(X)}{h},$$

si el límite existe y donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica.

**Observación 3.4** Sobre las derivadas parciales se debe tener en cuenta los puntos dados a continuación:

1. Otras notaciones usuales para la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x_i$  en el punto  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son  $f_{x_i}(X)$ ,  $D_{x_i}f(X)$  ó  $D_i f(X)$ .
2. En particular, si  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h(1, 0)) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h(0, 1)) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

3. Análogamente, si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y, z) + h(1, 0, 0)) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y, z) + h(0, 1, 0)) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y, z) + h(0, 0, 1)) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}.$$

### 3.4. Diferenciabilidad

**Ejemplo 3.7** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función, en cada caso calcule por definición, si existe,  $f_x$  y  $f_y$

1.  $f(x, y) = x^2y^3$ .

2.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , en el punto  $(0, 0)$ .

### Solución:

1. La derivada parcial de  $f$  respecto a la variable  $x$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2y^3 - x^2y^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2y^3 + 2xy^3h + y^3h^2 - x^2y^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2xy^3 + hy^3) \\ &= 2xy^3. \end{aligned}$$

De forma análoga, se obtiene que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(y+h)^3 - x^2y^3}{h} = 3x^2y^2$ .

2. Usando la definición anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente se verifica que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

**Observación 3.5** En la práctica, para calcular la derivada parcial con respecto a  $x_i$ , simplemente se considera las demás variables como constantes y se deriva con respecto a  $x_i$ . Para ilustrar este proceso, observe los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.8** Calcule las derivadas parciales de  $f$  en los puntos indicados.

1.  $f(x, y) = x^2y + e^{x^2y^2}$ , en el punto  $(x, y)$ .
2.  $f(x, y, z) = xyz + y^2 + z^2$ , en el punto  $(-1, 1, 2)$ .
3.  $f(x, y, z) = \text{sen}(\sqrt{2x^3 + y^2 + z})$ , en el punto  $(x, y, z)$ .

**Solución:**

1. Las derivadas parciales de  $f(x, y) = x^2y + e^{x^2y^2}$  son:

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2e^{x^2y^2}.$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2ye^{x^2y^2}.$$

2. Si  $f(x, y, z) = xyz + y^2 + z^2$  sus derivadas parciales en el punto  $(-1, 1, 2)$  son:

$$f_x(-1, 1, 2) = yz|_{(-1,1,2)} = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$f_y(-1, 1, 2) = xz + 2y|_{(-1,1,2)} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0.$$

$$f_z(-1, 1, 2) = xy + 2z|_{(-1,1,2)} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3.$$

3. Las derivadas parciales de  $f(x, y, z) = \text{sen}(\sqrt{2x^3 + y^2 + z})$  son:

$$f_x(x, y, z) = \frac{3x^2 \cos(\sqrt{2x^3 + y^2 + z})}{\sqrt{2x^3 + y^2 + z}}.$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{y \cos(\sqrt{2x^3 + y^2 + z})}{\sqrt{2x^3 + y^2 + z}}.$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\cos(\sqrt{2x^3 + y^2 + z})}{2\sqrt{2x^3 + y^2 + z}}.$$



**Definición 3.5 (Derivadas parciales de segundo orden)** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto. Entonces, si existe la derivada parcial de segundo orden de  $f$ , se define como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

**Observación 3.6** En relación con la definición anterior se tiene que:

1. Otras notaciones usuales para las derivadas parciales de segundo orden de  $f$  son  $f_{x_i x_j}$ ,  $f_{ij}$ ,  $D_{x_i x_j} f$ ,  $D_{x_j} D_{x_i} f$  ó  $D_{ij} f$ .
2. En particular, si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , todas las derivadas parciales de segundo orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9** Sea  $f(x, y) = \cos(xy) + xy$ , calcule todas las derivadas parciales de segundo orden.

**Solución:** Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x = -y \operatorname{sen}(xy) + y \quad y \quad f_y = -x \operatorname{sen}(xy) + x$$

Luego, las de segundo orden son:

- $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-y \operatorname{sen}(xy) + y) = -y^2 \cos(xy).$
- $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-x \operatorname{sen}(xy) + x) = -x^2 \cos(xy).$
- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-y \operatorname{sen}(xy) + y) = -xy \cos(xy) - \operatorname{sen}(xy) + 1.$
- $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x \operatorname{sen}(xy) + x) = -xy \cos(xy) - \operatorname{sen}(xy) + 1.$

**Ejemplo 3.10** Sea  $f(x, y) = g(x, y)e^{ax+by}$ , tal que  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$ . Determine los valores de  $a$  y  $b$  tales que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f = 0$$

**Solución:** En otra notación se debe mostrar que  $f_{yx} - f_x - f_y + f = 0$ . A partir de ello se tiene que:

- $f_x = g_x e^{ax+by} + a g e^{ax+by} = e^{ax+by}(g_x + ag)$ .
- $f_y = g_y e^{ax+by} + b g e^{ax+by} = e^{ax+by}(g_y + bg)$ .
- $f_{yx} = a e^{ax+by}(g_y + bg) + e^{ax+by}(g_{yx} + bg_x) = e^{ax+by}(ag_y + abg + bg_x)$  pues  $g_{yx} = 0$ .

Estos resultados se cambian en la igualdad  $f_{yx} - f_x - f_y + f = 0$  propuesta inicialmente, esto es:

$$\begin{aligned} e^{ax+by}(ag_y + abg + bg_x - g_x - ag - g_y - bg + g) &= 0 \\ \Rightarrow e^{ax+by}((a-1)g_y + (b-1)g_x + (ab - a - b + 1)g) &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que  $a = 1$  y  $b = 1$  para que la igualdad se cumpla.

**Ejemplo 3.11** Se dice que un campo escalar es armónico si cumple la igualdad de Laplace dada por  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Verifique que  $f(x, y) = \arctan(y/x)$  es armónico.

**Solución:** Se debe probar que  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ . Para ello observe que:

- $f_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ .
- $f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ .
- $f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .
- $f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ .

Con estos resultados es claro que el campo escalar dado es armónico.

**Teorema 3.6** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto. Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existe y es continua en  $U$ , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Observación 3.7** Algunos aspectos a considerar de este teorema son:

1. Las derivadas de segundo orden  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , con  $i \neq j$ , se suelen llamar derivadas cruzadas de segundo orden o derivadas mixtas de segundo orden. Así, teorema 3.6 establece que si las derivadas cruzadas de  $f$  existen y son continuas, entonces son iguales.
2. Si  $f$  es un campo escalar de dos variables  $x$  e  $y$ , si  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  existe y es continua, entonces  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .
3. Si  $f$  es un campo escalar de tres variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$  existe y es continua, entonces  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ . Igual ocurre con las otras dos derivadas cruzadas.

**Ejemplo 3.12** Sea  $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$ , verifique que las derivadas parciales cruzadas de segundo orden son iguales.

**Solución:** Observe que  $f_x = 3x^2 + 2xy^2$  y  $f_{xy} = 4xy$ . Como ambas son continuas entonces por el teorema 3.6 se cumple que  $f_{yx} = 4xy$ , lo cual es cierto ya que  $f_y = 2x^2y + 3y^2$  y  $f_{yx} = 4xy$ .

### 3.4.2. Funciones diferenciables

**Definición 3.6 (Función diferenciable)** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivadas parciales de primer orden y  $U$  un conjunto abierto, se dice que  $f$  es diferenciable en el punto  $P \in U$  si la función  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$r(h) = f(P + h) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} h_i - f(P),$$

satisface que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ , en tal caso  $r(h)$  se conoce como residuo. Si  $f$  es diferenciable en todo punto  $P$  de  $U$  solo se dice que  $f$  es diferenciable.

**Ejemplo 3.13** Pruebe que  $f(x, y) = xy^2$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

**Solución:** Observe que  $f_x(x, y) = y^2$  y  $f_y(x, y) = 2xy$ . Según la definición 3.6, tome  $P(0, 0)$  y

sea  $h = (h_1, h_2)$ . Luego, defina la función  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} r(h_1, h_2) &= f((0, 0) + (h_1, h_2)) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_i} h_i - f(0, 0) \\ &= f(h_1, h_2) - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} h_2 - f(0, 0) \\ &= h_1 h_2^2 - 0 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2 - 0 \\ &= h_1 h_2^2. \end{aligned}$$

Luego,  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$  (este límite se calcula usando coordenadas polares, ver observación 3.3). Por tanto, la función  $f$  es diferenciable en el punto  $P(0, 0)$ .

**Observación 3.8** La existencia de las derivadas parciales en un punto  $P$  es una condición necesaria (no suficiente) para establecer que  $f$  es diferenciable en  $P$ .

**Ejemplo 3.14** Estudie la diferenciabilidad de la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  en el origen.

**Solución:** Las derivadas parciales de  $f$  vienen dadas por

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Dichas derivadas parciales no existen en el origen, de esta manera y por la observación 3.8,  $f$  no es diferenciable en el punto  $P(0, 0)$ .

**Observación 3.9** El ejemplo anterior también permite establecer que una función  $f$  continua en un punto  $P$  no necesariamente debe ser diferenciable en  $P$ . Lo contrario sí es cierto siempre, es decir, si una función  $f$  es diferenciable en  $P$ , entonces  $f$  es continua en  $P$ .

### 3.4. Diferenciabilidad

**Teorema 3.7** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones definidas en un conjunto  $U$  abierto y diferenciables en  $P \in U$ , entonces:

1.  $f \pm g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $P \in U$ , donde  $(f \pm g)(P) = f(P) \pm g(P)$ .
2.  $fg : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $P \in U$ , donde  $(fg)(P) = f(P)g(P)$ .
3. Si  $g(P) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $P \in U$ , donde  $\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{f(P)}{g(P)}$ .

**Teorema 3.8** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto, si todas las derivadas parciales de primer orden de  $f$  son continuas en  $P \in U$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $P$ .

**Ejemplo 3.15** Pruebe que  $f(x, y, z) = \cos(x - y + z^2)$  es diferenciable en todo punto.

**Solución:** Observe que las primeras derivadas parciales son:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\text{sen}(x - y + z^2)$ .
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \text{sen}(x - y + z^2)$ .
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z \text{sen}(x - y + z^2)$ .

Note que todas estas derivadas parciales son continuas en cualquier punto  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , así, por el teorema 3.8,  $f$  es diferenciable en cualquier punto  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 3.7 (Diferencial)** Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $P \in U$ ,  $U$  abierto, se define la diferencial o derivada total de  $f$  en  $P$ , denotada por  $df(P, h)$ , como

$$df(P, h) = \frac{\partial f(P)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(P)}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f(P)}{\partial x_n} h_n.$$

Usualmente se escribe como  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ .

**Ejemplo 3.16** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2y + xy^2$ , calcule la diferencial de  $f$ .

**Solución:** Es claro que la diferencial de  $f$  está dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy.$$

**Ejemplo 3.17** Determine la diferencial de la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por el criterio  $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ , con  $a, b, c$  y  $d$  constantes.

**Solución:** La diferencial de  $f$  viene dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = adx + bdy + cdz.$$

### 3.4.3. Gradiente.

**Definición 3.8 (Vector gradiente)** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  un punto en  $U$ , el vector gradiente de  $f$  en  $P$  es la función vectorial dada por

$$\nabla f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right).$$

Es decir, es el vector formado por todas las derivadas parciales evaluadas en  $P$ .

**Observación 3.10** Algunos casos particulares de la definición anterior son:

1. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ .
2. Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$ .

**Ejemplo 3.18** Sea  $f(x, y) = x^2 - 4xy$ , determine el gradiente de  $f$  en el punto  $P(1, 2)$ .

**Solución:** Observe que  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x - 4y, -4x)$ . Luego,

$$\nabla f(1, 2) = (2 \cdot 1 - 4 \cdot 2, -4 \cdot 1) = (-6, -4).$$

**Ejemplo 3.19** Sea  $f(x, y, z) = xyz$ , determine el gradiente de  $f$ .

**Solución:** En este caso se obtiene que

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (yz, xz, xy).$$

**Definición 3.9 (Funciones homogéneas)** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  si

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Observación 3.11** Algunas particularidades de la definición 3.9 anterior son:

1. Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  abierto, es diferenciable, entonces  $f$  es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  si

$$(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = \alpha f(x, y),$$

lo que equivale a decir que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

2. Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  abierto, es diferenciable, entonces  $f$  es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  si

$$(x, y, z) \cdot \nabla f(x, y, z) = \alpha f(x, y, z),$$

lo que equivale a decir que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \alpha f.$$

**Ejemplo 3.20** Verifique que la función  $f(x, y) = 8x^3 + 3x^2y + 5y^3$  es homogénea de grado 3.

**Solución:** Observe primero que  $\nabla f(x, y) = (24x^2 + 6xy, 3x^2 + 15y^2)$ , siendo las derivadas parciales de  $f$  continuas en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ , así  $f$  es diferenciable por el teorema 3.8. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x(24x^2 + 6xy) + y(3x^2 + 15y^2) \\ &= 24x^3 + 9x^2y + 15y^3 \\ &= 3(8x^3 + 3x^2y + 5y^3) \\ &= 3f(x, y). \end{aligned}$$

De esta forma se comprueba que  $f$  es homogénea de grado 3.

**Ejemplo 3.21** Pruebe que la función  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  es homogénea de grado 0.

**Solución:** Primero se tiene que  $\nabla f = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$ , así  $f$  es diferenciable excepto en el origen puesto que sus derivadas parciales se indefinen. Luego,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x \left(\frac{1}{y}\right) + y \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ &= \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con ello la función  $f$  es homogénea de grado 0.

**Ejemplo 3.22** Considere la función  $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5}$ .

1. Determine  $\nabla f(x, y, z)$ .
2. Justifique por qué  $f$  no es diferenciable en el origen.
3. Muestre que  $f$  es homogénea hallando su grado.



**Solución:**

1. El gradiente de la función  $f$  viene dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{5x^4 + 32x^3y + 15yz^3}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}}, \frac{8x^4 + 15xz^3}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}}, \frac{45xyz^2 + 5z^4}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \right).$$

2. De acuerdo con el gradiente de  $f$ , note que las derivadas parciales no existen en el origen, consecuentemente  $f$  no es diferenciable en el origen.

3. Para verificar que  $f$  es homogénea y para determinar su grado, se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} &= x \left( \frac{5x^4 + 32x^3y + 15yz^3}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \right) \\ &+ y \left( \frac{8x^4 + 15xz^3}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \right) \\ &+ z \left( \frac{45xyz^2 + 5z^4}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \right) \\ &= \frac{5x^5 + 32x^4y + 15xyz^3 + 8x^4y + 15xyz^3 + 45xyz^3 + 5z^5}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \\ &= \frac{5x^5 + 40x^4y + 75xyz^3 + 5z^5}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \\ &= \frac{5(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)}{3(x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5)^{2/3}} \\ &= \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^5 + 8x^4y + 15xyz^3 + z^5} \\ &= \frac{5}{3} f(x, y, z). \end{aligned}$$

Con ello, la función es homogénea de grado  $\frac{5}{3}$ .

**Teorema 3.9** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables definidas en un conjunto  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $P \in U$ , entonces:

1.  $\nabla(f \pm g)(P) = \nabla f(P) \pm \nabla g(P)$ .
2.  $\nabla(fg)(P) = g(P)\nabla f(P) + f(P)\nabla g(P)$ .
3.  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{g(P)\nabla f(P) - f(P)\nabla g(P)}{g^2(P)}$  si  $g(P) \neq 0$ .

### 3.4.4. Derivada direccional

**Definición 3.10 (Derivada direccional)** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un conjunto abierto, sea  $P \in U$  y sea  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$ , se define la derivada direccional de  $f$  en  $P$  en la dirección  $\vec{u}$  como

$$D_{\vec{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}.$$

**Observación 3.12** Es relevante considerar que:

1. La derivada direccional  $D_{\vec{u}}f(P)$  es la razón de cambio o tasa de crecimiento de  $f$  en  $P$  en la dirección  $\vec{u}$ .
2. Una derivada parcial de una función  $f$  en un punto  $P$  realmente es la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  y en la dirección de algún vector canónico. En particular, si  $f$  es una función de  $n$  variables y sea el punto  $P \in \mathbb{R}^n$ , entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = D_{e_1}f(P),$$

donde  $e_1 = (1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-veces}})$ .

**Ejemplo 3.23** Sea  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , calcule la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P(1, 2)$  y en la dirección del vector  $(1, 1)$ .

### 3.4. Diferenciabilidad

**Solución:** El vector  $\vec{u}$  está dado por  $\vec{u} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Entonces, la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  y en la dirección  $\vec{u}$  es:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(1, 2\right) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} + 4 + \frac{4h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6h}{\sqrt{2}} + h^2}{h} \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.10** Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y si  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$ , entonces

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u},$$

para  $P$  un punto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 3.24** Sea  $f(x, y, z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(xz)$ , calcule la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$  en la dirección del vector  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ .

**Solución:** Observe que  $\vec{u} = \frac{(2, 1, -2)}{\|(2, 1, -2)\|} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ . Luego, las primeras derivadas parciales de  $f$  son:

- $f_x = -y \operatorname{sen}(xy) + \frac{1}{x}$ .
- $f_y = -x \operatorname{sen}(xy) + ze^{yz}$ .
- $f_z = ye^{yz} + \frac{1}{z}$ .

Estas derivadas parciales son continuas en  $P\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ , por lo que la función  $f$  es diferenciable en  $P$  por el teorema 3.8. Note además que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-y \operatorname{sen}(xy) + \frac{1}{x}, -x \operatorname{sen}(xy) + ze^{yz}, ye^{yz} + \frac{1}{z}\right).$$

Ahora, por el teorema 3.10, la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  y en la dirección  $\vec{u}$  es

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(P) &= \nabla f(P) \cdot \vec{u} \\ &= \nabla f\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(1, \frac{1}{2}, 2\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.25** Suponga que en una cierta región del espacio, el potencial eléctrico<sup>3</sup>  $V$  está dado por  $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ . Determine la razón de cambio del potencial en punto  $P(3, 4, 5)$  en la dirección  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

**Solución:** Realmente se está preguntando por la derivada direccional de la función  $V$  en el punto  $P(3, 4, 5)$  y en la dirección  $\vec{v} = (1, 1, -1)$ . Observe que

$$\nabla V(x, y, z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy).$$

A partir de este gradiente, es evidente que las primeras derivadas parciales de  $V$  son continuas en el punto  $P$  (de hecho siempre son continuas en cada punto de  $\mathbb{R}^3$ ), por lo que la función  $V$  es diferenciable. Además, sea  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ .

Por el teorema 3.10, se tiene que:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}V(P) &= \nabla V(P) \cdot \vec{u} \\ &= \nabla V(3, 4, 5) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(38, 6, 12) \cdot (1, 1, -1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(38 + 6 - 12) \\ &= \frac{32}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>El potencial eléctrico  $V$  en un punto del espacio es una magnitud escalar que permite obtener una medida del campo eléctrico en dicho punto a través de la energía potencial electrostática que adquiriría una carga si se sitúa en ese punto.

### 3.4. Diferenciabilidad

**Ejemplo 3.26** Considere la función  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, y sea  $P \in U$ . Suponga que  $D_{\vec{u}}f(P) = 3$  y  $D_{\vec{v}}f(P) = 2$ , en donde  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$  y  $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Determine  $\nabla f(P)$ .

**Solución:** Puesto que  $f$  es diferenciable, por el teorema 3.10 se sabe que  $D_{\vec{w}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{w}$ , con  $\|\vec{w}\| = 1$ . Con ello, y notando que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dados son unitarios (su norma es 1), se tiene que:

$$\begin{cases} \nabla f(P) \cdot \vec{u} = 3 \\ \nabla f(P) \cdot \vec{v} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f_x(P), f_y(P)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 3 \\ (f_x(P), f_y(P)) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases},$$

lo cual produce el sistema de ecuaciones lineales siguiente, cuyas incógnitas son  $f_x(P)$  y  $f_y(P)$ .

$$\begin{cases} f_x(P) - f_y(P) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{3}f_x(P) + f_y(P) = 4 \end{cases}.$$

Este sistema se resuelve mediante algún método (reducción Gaussiana, regla de Cramer, entre otros) y se llega a concluir que

$$f_x(P) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \quad \text{y} \quad f_y(P) = \frac{4 - 3\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3}},$$

de donde se deduce que  $\nabla f(P) = \left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}, \frac{4 - 3\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3}}\right)$ .

**Ejemplo 3.27** Si  $D_{\vec{u}}f(3, 2) = 1$  y  $D_{\vec{v}}f(3, 2) = \sqrt{8}$ , determine  $D_{\vec{w}}f(3, 2)$ , suponiendo que  $f$  es diferenciable,  $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ,  $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  y  $\vec{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

**Solución:** Observe que los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son todos unitarios, y como  $f$  es diferenciable, por el teorema 3.10 se tiene que:

$$\begin{cases} \nabla f(3, 2) \cdot \vec{u} = 1 \\ \nabla f(3, 2) \cdot \vec{v} = \sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f_x(3, 2), f_y(3, 2)) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1 \\ (f_x(3, 2), f_y(3, 2)) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{8} \end{cases},$$

de donde se forma el sistema:

$$\begin{cases} 3f_x(3, 2) + 4f_y(3, 2) = 5 \\ f_x(3, 2) - f_y(3, 2) = 4 \end{cases}.$$

Al resolver este sistema se obtiene ue  $f_x(3, 2) = 3$  y  $f_y(3, 2) = -1$ . De esta forma se deduce que  $\nabla f(3, 2) = (f_x(3, 2), f_y(3, 2)) = (3, -1)$ . A partir de esto resulta que:

$$\begin{aligned} D_{\vec{w}}f(3, 2) &= \nabla f(3, 2) \cdot \vec{w} \\ &= (3, -1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.28** Halle un vector unitario  $\vec{u} = (a, b, 0)$ , de tal forma que la derivada direccional de la función  $f(x, y, z) = \frac{1}{z} - \frac{xy}{z}$  en el punto  $P(1, 1, 1)$  en la dirección del vector  $\vec{u}$  sea igual a  $\sqrt{2}$ .

**Solución:** Primero se obtiene el gradiente de  $f$  y se evalúa en  $P$ , esto es:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x}, -\frac{x}{z}, -\frac{1}{z^2} + \frac{xy}{z^2}\right) \Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = (-1, -1, 0).$$

Ahora, suponiendo que  $\vec{u}$  es unitario, la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  en la dirección  $\vec{u}$  es

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(1, 1, 1) \cdot (a, b, 0) = (-1, -1, 0) \cdot (a, b, 0) = -a - b = \sqrt{2}.$$

Luego, note que el hecho que  $\vec{u} = (a, b, 0)$  sea unitario significa que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ . Entonces, con los datos anteriores se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = -\sqrt{2} \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{2} - a \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases},$$

Sustituya la primera igualdad de este sistema en la segunda y al simplificar se llega a la ecuación cuadrática

$$2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}a + 1\right)^2 = 0,$$

cuya única solución es  $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Con ello se induce también que  $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Finalmente, el vector buscado está dado por

$$\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

### 3.4. Diferenciabilidad

Note además que, efectivamente, la norma del vector  $\vec{u}$  es uno.

**Teorema 3.11** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\vec{u} \in U$  tal que  $\|\vec{u}\| = 1$ , entonces

$$-\|\nabla f(P)\| \leq D_{\vec{u}}f(P) \leq \|\nabla f(P)\|,$$

para  $P$  un punto de  $U$ .

**Observación 3.13** Del teorema anterior se deduce lo siguiente:

1. La tasa de crecimiento<sup>4</sup> máxima de  $f$  en el punto  $P$  ocurre en la dirección  $\nabla f(P)$  y su valor máximo es  $\|\nabla f(P)\|$ .
2. La tasa de crecimiento mínimo de  $f$  en el punto  $P$  ocurre en la dirección  $-\nabla f(P)$  y su valor mínimo es  $-\|\nabla f(P)\|$ .

**Ejemplo 3.29** Sea  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y$ . Determine la dirección en la cual la tasa de crecimiento de  $f$  en el punto  $P(1, -1)$  es máxima y la tasa de crecimiento respectiva.

**Solución:** Según el teorema 3.11 y la observación 2, en realidad se está preguntando cuál es la dirección en que la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P(1, -1)$  tiene el valor máximo, lo cual ocurre en la dirección  $\nabla f(P)$ . Con ello, note que

$$\nabla f(x, y) = (2x - y, -x + 2y - 1),$$

por tanto  $\nabla f(1, -1) = (3, -4)$ , siendo este el vector donde la tasa de crecimiento de  $f$  en  $P$  alcanza su valor máximo. Para hallar este valor, note que las primeras derivadas parciales de  $f$  son continuas y por tanto  $f$  es diferenciable, entonces, por el teorema 3.11, el valor máximo es  $\|\nabla f(P)\| = \|\nabla f(1, -1)\| = \|(3, -4)\| = 5$ .

**Ejemplo 3.30** Considere la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  en el punto  $P(1, 1, 1)$ . Determine la derivada direccional de  $f$  en  $P$ , en la dirección del crecimiento máximo.

**Solución:** De acuerdo con el teorema 3.11, basta calcular  $\|\nabla f(P)\|$ , donde

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

---

<sup>4</sup>Recuerde que puede cambiar tasa de crecimiento por derivada direccional.

Así,  $\|\nabla f(1, 1, 1)\| = \|(2, 2, 2)\| = 2\sqrt{3}$  es el valor de la derivada direccional de  $f$  en  $P$ , en la dirección del crecimiento máximo.

**Definición 3.11 (Derivada direccional a la largo de una curva)** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{C}$  una curva con parametrización  $r : \mathbb{R} \rightarrow U$ , se define la derivada direccional de  $f$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  en el punto  $P = r(t_0) \in U$  como

$$D_{T(t_0)}f(P) = \nabla f(P) \cdot T(t_0),$$

donde  $T(t_0)$  es el vector tangente unitario a  $r$  en el punto  $P$ .

**Observación 3.14** Si la curva  $\mathcal{C}$  está descrita de la forma

$$\mathcal{C} : \begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

el vector tangente unitario en el punto  $P \in \mathcal{C}$ , sin necesidad de parametrizar la curva, se puede calcular como

$$T(P) = \frac{\nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P)}{\|\nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P)\|}.$$

**Ejemplo 3.31** Halle la derivada direccional de  $f(x, y) = x^2 - 2xy$  a lo largo de la parábola  $y = x^2 - x + 2$  en el punto  $P(1, 2)$ .

**Solución:** Note que la parábola se puede parametrizar como  $r(t) = (t, t^2 - t + 2)$ , donde si  $t = 1$  se produce el punto  $P(1, 2)$ . Por otro lado  $r'(t) = (1, 2t - 1)$ , por lo que el vector tangente a  $f$  en el punto  $P$  está dado por

$$T(1) = \frac{r'(1)}{\|r'(1)\|} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

El gradiente de  $f$  es

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, -2x) \Rightarrow \nabla f(1, 2) = (-2, -2),$$

de esta manera se tiene que

$$D_{T(1)}f(P) = \nabla f(P) \cdot T(1) = (-2, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \frac{-4}{\sqrt{2}}.$$



**Ejemplo 3.32** Sea  $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z$  y considere la curva

$$r(t) = \left( \cos t, \frac{1 + \sin t}{\sqrt{5}}, \frac{2 + 2 \sin t}{\sqrt{5}} \right), \quad \text{con } t \in [0, \pi].$$

1. Muestre que la derivada direccional de la función  $f$  en los puntos  $P = r(t_0)$  a lo largo de la curva  $r(t)$  es  $-\sin(2t_0)$ .
2. Determine todos los puntos sobre la curva  $r(t)$  en los cuales la derivada direccional de  $f$  a lo largo de  $r(t)$  es nula.

### Solución:

1. Por la definición 3.11 se sabe que la derivada direccional de la función  $f$  en los puntos  $P = r(t_0)$  a lo largo de la curva  $r(t)$  está dada por la fórmula

$$D_{T(t_0)}f(r(t_0)) = \nabla f(r(t_0)) \cdot T(t_0).$$

Ahora, observe que  $r'(t) = \left( -\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{2 \cos t}{\sqrt{5}} \right)$  y que  $\|r'(t)\| = 1$ , por tanto

$$T(t_0) = \left( -\sin t_0, \frac{\cos t_0}{\sqrt{5}}, \frac{2 \cos t_0}{\sqrt{5}} \right).$$

Por otro lado, note que  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2, -1)$ , entonces  $\nabla f(r(t_0)) = (2 \cos t_0, 2, -1)$ . Con estos datos se tiene que

$$\begin{aligned} D_{T(t_0)}f(r(t_0)) &= \nabla f(r(t_0)) \cdot T(t_0) \\ &= (2 \cos t_0, 2, -1) \cdot \left( -\sin t_0, \frac{\cos t_0}{\sqrt{5}}, \frac{2 \cos t_0}{\sqrt{5}} \right) \\ &= -2 \cos t_0 \sin t_0 \\ &= -\sin(2t_0). \end{aligned}$$

2. Según la parte anterior de este ejemplo, se debe hallar el o los valores  $t_0$  tales que  $-\sin(2t_0) = 0$  con  $t_0 \in [0, \pi]$ , es decir, cuando

$$\blacksquare \quad 2t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0, \quad \blacksquare \quad 2t_0 = \pi \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \blacksquare \quad 2t_0 = 2\pi \Rightarrow t_0 = \pi.$$

De esta manera los puntos buscados son  $r(0) = \left( 1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ ,  $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left( 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$  y  $r(\pi) = \left( -1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ .

**Ejemplo 3.33** Determine la derivada direccional de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  en el punto  $P(3, 4, 5)$  a lo largo de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} .$$

**Solución:** Según la observación 3.14, sin necesidad de parametrizar la curva, el vector tangente a  $\mathcal{C}$  en el punto  $P$  está dado por

$$T(P) = \frac{\nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P)}{\|\nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P)\|},$$

donde  $g_1(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 25$  y  $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Note que

$$\nabla g_1(x, y, z) = (4x, 4y, -2z) \Rightarrow \nabla g_1(3, 4, 5) = (12, 16, -10) \text{ y}$$

$$\nabla g_2(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) \Rightarrow \nabla g_2(3, 4, 5) = (6, 8, -10).$$

Entonces se tendría que

$$T(3, 4, 5) = \frac{(12, 16, -10) \times (6, 8, -10)}{\|(12, 16, -10) \times (6, 8, -10)\|} = \frac{1}{100}(-80, 60, 0) = \frac{1}{5}(-4, 3, 0).$$

También observe que  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ , así  $\nabla f(3, 4, 5) = (6, 8, -10)$ . Con toda esta información, por la definición 3.11, la derivada direccional solicitada viene dada por

$$\begin{aligned} D_{T(P)}f(P) &= \nabla f(P) \cdot T(P) \\ &= (6, 8, -10) \cdot \frac{1}{5}(-4, 3, 0) \\ &= -\frac{24}{5} + \frac{24}{5} + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.34** Calcule la derivada direccional de  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$  en el punto  $P(1, 1, 1)$  en la dirección de la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z^2 = 2y^2 - x^3 \end{cases} .$$

**Solución:** Defina  $g_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y  $g_2(x, y, z) = 2y^2 - x^3 - z^2$ . Siga el mismo

esquema de solución del ejemplo anterior, al final la respuesta debe ser la siguiente:

$$\begin{aligned}
 D_{T(P)}f(P) &= \nabla f(P) \cdot T(P) \\
 &= (3, -4, 2) \cdot \frac{2}{\sqrt{158}}(-12, 2, 22) \\
 &= -\frac{72}{\sqrt{158}} - \frac{16}{\sqrt{158}} + \frac{88}{\sqrt{158}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

## Ejercicios

**Ejercicio 59** Sea  $f(x, y) = 3x^2y^4 - 12x^6 + 2xy^5$ . Verifique que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 6f.$$

**Ejercicio 60** Compruebe que los siguientes campos escalares son armónicas en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, satisfacen la ecuación  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

1.  $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$
2.  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .
3.  $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$ .

**Ejercicio 61** Sea  $f(x, y) = x^2 \sin(3x - 2y)$ . Verifique la identidad

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial y} + 6xf.$$

**Ejercicio 62** Verifique que la ecuación  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  satisface la igualdad dada por

$$y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Ejercicio 63** Sea  $f(x, y) = y^n e^{-x^2/4y}$ . Hallar el valor de  $n$  tal que  $f$  satisfaga la ecuación dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

**Ejercicio 64** Sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$ . Verifique que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(1, 1, \dots, 1) = n.$$

**Ejercicio 65** Sea  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ . Muestre que

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

**Ejercicio 66** Sea  $\vec{u} = (x, y, z)$  y  $f(x, y, z) = \|\vec{u}\|$ . Demuestre que  $\nabla f(x, y, z)$  es un vector unitario paralelo a  $\vec{u}$ .

**Ejercicio 67** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ .

1. Determine los puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  donde el gradiente de esta función tiene la misma dirección que el vector  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ .
2. Determine los puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  donde el gradiente de esta función es perpendicular al vector  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ .

**Ejercicio 68** Verifique que las siguientes funciones son homogéneas determinando su grado.

1.  $f(x, y) = ax + by$ .
2.  $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$ .
3.  $f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ .
4.  $f(x, y) = \frac{x + 3y}{2x - y}$ .
5.  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ .
6.  $f(x, y, z) = xy \ln \frac{xy + z^2}{x(y + z)}$ .

**Ejercicio 69** Halle la derivada direccional de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  en el punto correspondiente a  $t = \frac{\pi}{4}$ , en la dirección del vector tangente unitario a la curva  $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ .

**Ejercicio 70** Considere la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

1. Halle la derivada de  $f$ , en la dirección del vector tangente unitario de la curva hélice  $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$  en  $t = -\frac{\pi}{4}$ .
2. Determine la ecuación del plano normal a la curva  $\mathcal{C}$  definida por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 3x^2 + y^2 + z^2 = 13 \\ x^2 + y^2 - z^2 = -7 \end{cases} ,$$

### 3.4. Diferenciabilidad

en el punto  $(1, 1, 3)$ .

**Ejercicio 71** Considere la función  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 8z - 4$  y la curva de intersección  $\mathcal{C}$  entre el elipsoide  $x^2 + 2y^2 + (z - 4)^2 = 20$  y el paraboloide  $x^2 + 2y^2 + z = 4$ .

1. Determine una parametrización trigonométrica para la curva  $\mathcal{C}$ .
2. Usando la parametrización anterior, determine la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P(\sqrt{2}, 1, 0)$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ .
3. Use la observación 3.14 para hallar la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P(\sqrt{2}, 1, 0)$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ .

**Ejercicio 72** Calcule la derivada direccional de la función  $f(x, y, z) = xyze^{xyz}$  en el punto  $P(1, 1, 1)$  en la dirección del vector tangente unitario a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} xyz = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases},$$

con segunda componente positiva.

**Ejercicio 73** Sea  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$ , muestre que la derivada direccional de la función  $f$  en el punto  $P(1, 1, 1)$  a lo largo de la curva de intersección de las superficies  $2x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y  $z^2 = 2y^2 - x^2$  es nula, es decir, verifique que  $D_T f(P) = 0$ .

**Ejercicio 74** Dada la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y el punto  $P(1, 1, 1)$ .

1. Determine la derivada direccional de  $f$  en  $P$ , en la dirección del crecimiento máximo.
2. Determine la derivada direccional de  $f$  en  $P$ , en la dirección de la tangente unitaria, con primera componente positiva, a la curva  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $x + y + z = 3$ .

**Ejercicio 75** Sea  $f$  diferenciable y suponga que las derivadas direccionales de  $f$  en el punto  $P$  y en dirección  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son, respectivamente,

$$D_{\vec{u}}f(P) = a \quad \text{y} \quad D_{\vec{v}}f(P) = b,$$

donde  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  son vectores linealmente independientes. Determine el  $\nabla f(P)$ .

**Sugerencia:** debe averiguar  $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ .

### 3.5. Plano tangente y recta normal a una superficie

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie diferenciable descrita por la ecuación  $f(x, y, z) = 0$  y sea  $P$  un punto sobre  $\mathcal{S}$ , para cualquier curva  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathcal{S}$  con parametrización  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  tal que  $r(t_0) = P$ , se tiene que el vector  $\nabla f(P) \cdot r'(t_0) = 0$ , es decir, el vector  $\nabla f(P)$  es perpendicular a toda trayectoria sobre  $\mathcal{S}$  en el punto  $P$ .

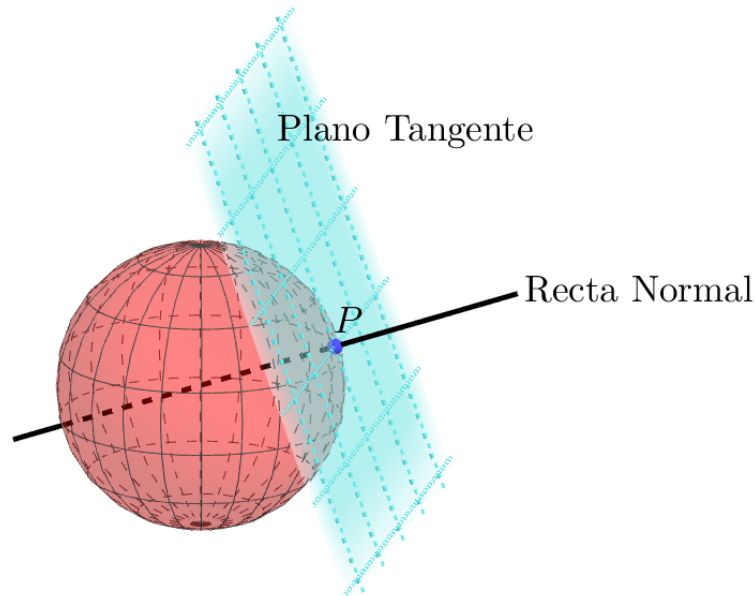


Figura 3.1: Plano tangente y recta Normal a la superficie  $\mathcal{S}$  en el punto  $P$

**Definición 3.12 (Plano tangente y recta normal a  $\mathcal{S}$ )** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie descrita por  $f(x, y, z) = 0$ . Se define la ecuación normal del plano tangente a  $\mathcal{S}$  en el punto  $P \in \mathcal{S}$  como

$$\nabla f(P) \cdot (X - P) = 0,$$

donde  $X = (x, y, z)$  es un punto arbitrario del plano tangente, diferente de  $P$ . Si se asume que  $\nabla f(P) = (a, b, c)$  y  $P(p_1, p_2, p_3)$ , entonces la ecuación cartesiana del plano tangente a  $\mathcal{S}$  en el punto  $P \in \mathcal{S}$  es

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3.$$

También se define la ecuación vectorial de la recta normal a  $\mathcal{S}$  como

$$(x, y, z) = P + t\nabla f(P), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Al punto  $P \in \mathcal{S}$  se le suele denominar **punto de tangencia**.

### 3.5. Plano tangente y recta normal a una superficie

**Ejemplo 3.35** Encuentre una ecuación del plano tangente al elipsoide  $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$  en el punto  $P(2, 1, \sqrt{6})$ .

**Solución:** Primero observe que  $P$  pertenece a la superficie dada. Segundo, defina la función  $f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12$ , donde

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x, 6y, 2z \right) \Rightarrow \nabla f(2, 1, \sqrt{6}) = (3, 6, 2\sqrt{6}).$$

Seguidamente, la ecuación del plano tangente a la superficie en  $P$  es

$$3x + 6y + 2\sqrt{6}z = 24.$$

**Ejemplo 3.36** Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^2 - 4x$ , que sea perpendicular a la recta  $x = 3 + 4t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 1 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Defina  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4x - z$ , donde  $\nabla f(x, y, z) = (2x - 4, 2y, -1)$ . Se debe hallar el o los puntos de tangencia. Para ello, sea  $P(a, b, c)$  alguno de estos puntos, con  $P$  en la superficie dada.

Dado que la ecuación del plano tangente en el punto  $P$  de la superficie dada es perpendicular a la recta  $(x, y, z) = (3, 0, 1) + t(4, -2, 1)$ , el vector normal de dicho plano es paralelo al vector  $(4, -2, 1)$ , consecuentemente  $\nabla f(a, b, c) = (2a - 4, 2b, -1) = \lambda(4, -2, 1)$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Así se forma el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - 4 = 4\lambda \quad (1) \\ 2b = -2\lambda \quad (2) \\ -1 = \lambda \quad (3) \\ a^2 + b^2 - 4a - c = 0 \quad (4) \end{array} \right. .$$

De (3) se obtiene que  $\lambda = -1$ , lo cual se sustituye en las ecuaciones (1), (2) y (4) para concluir que  $a = 0$ ,  $b = 1$  y  $c = 1$ . Con esto, el punto de tangencia es  $P(0, 1, 1)$  y la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^2 - 4x$  en el punto  $P$  es

$$-4x + 2y - z = 1.$$

**Ejemplo 3.37** Encuentre los puntos de tangencia tal que el plano tangente a la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  sea paralelo al plano  $2x - y + 3z = 1$ .

**Solución:** Es similar al ejemplo anterior, sólo que en este caso solo se limita a hallar los puntos de tangencia. Defina  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , donde  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ . Sea  $P(a, b, c)$  el o los puntos de tangencia buscados, y como el plano tangente en  $P$  es paralelo al plano  $2x - y + 3z = 1$ , sus vectores normales deben ser paralelos, es decir, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(a, b, c) = (2a, 2b, 2c) = \lambda(2, -1, 3)$ . A partir de esta información se forma el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2a = 2\lambda & (1) \\ 2b = -\lambda & (2) \\ 2c = 3\lambda & (3) \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

De (1), (2) y (3) se tiene que  $a = \lambda$ ,  $b = -\frac{\lambda}{2}$  y  $c = \frac{3\lambda}{2}$ , cuyos resultados se sustituyen en (4) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 &= 1 \\ \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9\lambda^2}{4} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{7\lambda^2}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \lambda &= \pm \frac{2}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

Luego, si  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{14}}$ , entonces  $a = \frac{2}{\sqrt{14}}$ ,  $b = -\frac{1}{\sqrt{14}}$  y  $c = \frac{3}{\sqrt{14}}$ , por lo que un primer punto de tangencia es

$$P_1 \left( \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

Análogamente, si  $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{14}}$ , entonces  $a = -\frac{2}{\sqrt{14}}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{14}}$  y  $c = -\frac{3}{\sqrt{14}}$ , por lo que el segundo punto de tangencia es

$$P_2 \left( -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

**Ejemplo 3.38** Determine la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^2$ , de manera que sea paralelo al plano  $3x + 8y - 5z = 10$ .

**Solución:** Sea  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ , por tanto  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1)$ . Defina el punto  $P(a, b, c)$  como el o los puntos de tangencia buscados, dado que el plano tangente en  $P$  es paralelo al plano  $3x + 8y - 5z = 10$ , sus vectores normales deben ser paralelos, entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal



### 3.5. Plano tangente y recta normal a una superficie

que  $\nabla f(a, b, c) = (2a, 2b, -1) = \lambda(3, 8, -5)$ , formando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a = 3\lambda & (1) \\ 2b = 8\lambda & (2) \\ -1 = -5\lambda & (3) \\ a^2 + b^2 - c = 0 & (4) \end{cases} .$$

De la ecuación (3) se deduce que  $\lambda = \frac{1}{5}$ , lo cual se cambia en (1) y (2) para obtener que  $a = \frac{3}{10}$  y  $b = \frac{4}{5}$ . Posteriormente, estos dos resultados se sustituyen en (4) y se determina que  $c = \frac{73}{100}$ . Así sólo existe un único punto de tangencia el cual es  $P\left(\frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{73}{100}\right)$ . Con ello, la ecuación cartesiana del plano buscado es

$$\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}y - z = \frac{73}{100},$$

o bien

$$60x + 160y - 100z = 73.$$

**Ejemplo 3.39** Determine todos los puntos de la superficie  $z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$  donde el plano tangente sea horizontal.

**Solución:** Defina  $\nabla f(x, y, z) = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y - z$ , así  $\nabla f(x, y, z) = (2x - 2y - 8, -2x - 2y + 4, -1)$ . Luego, un plano es horizontal si es paralelo a otro plano con vector normal  $(0, 0, 1)$ . Así, sea  $P(a, b, c)$  un punto de tangencia, entonces  $\nabla f(a, b, c) = (2a - 2b - 8, -2a - 2b + 4, -1) = \lambda(0, 0, 1)$ , de donde se forma el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b - 8 = 0 & (1) \\ -2a - 2b + 4 = 0 & (2) \\ -1 = \lambda & (3) \\ a^2 - 2ab - b^2 - 8a + 4b - c = 0 & (4) \end{cases} .$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce que  $a = 3$  y  $b = -1$ , lo cual se cambia en (4) para obtener que  $c = -14$ . Es claro que  $\lambda = 1$ , sin embargo, este valor no afecta las demás igualdades. Así, existe un plano horizontal tangente en el punto  $P(3, -1, -14)$ .

**Ejemplo 3.40** Muestre que las superficies  $x^2 + 4y + z^2 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$  son tangentes entre sí en el punto  $P(0, -1, 2)$ .

**Solución:** Realmente lo que se debe probar es que las superficies dadas tienen el mismo plano tangente en el punto  $P(0, -1, 2)$ . Bajo esta premisa, note que dicho punto pertenece a ambas superficies, siendo, efectivamente, un punto de tangencia para ambas. Ahora, sean  $f_1(x, y, z) = x^2 + 4y + z^2$  y  $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7$ , donde

$$\nabla f_1(x, y, z) = (2x, 4, 2z) \Rightarrow \nabla f_1(0, -1, 2) = (0, 4, 4),$$

$$\nabla f_2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z - 6) \Rightarrow \nabla f_2(0, -1, 2) = (0, -2, -2).$$

Con esta información, se induce que el plano tangente a ambas superficies  $f_1$  y  $f_2$  en el punto  $P(0, -1, 2)$  es

$$y + z = 1,$$

y por tanto son tangentes entre sí en el punto  $P(0, -1, 2)$ .

**Ejemplo 3.41** Considere la superficie dada por  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 2$ .

1. Determine al plano tangente a dicha superficie en el punto  $P\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right)$ .
2. Verifique que el plano tangente averiguado corta a los ejes coordenados en puntos cuya suma de cuadrados es 8.

**Solución:**

1. Note que el punto  $P$  dado pertenece a la superficie dada pues

$$\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2}{3}} + (-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

Defina  $f(x, y, z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - 2$ , por tanto

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Por comodidad se toma  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$  como un vector paralelo al hallado, así, el plano tangente a la superficie dada en el punto  $P$  es

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2.$$

### 3.5. Plano tangente y recta normal a una superficie

2. El plano tangente averiguado dado por  $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$  corta al eje  $x$  cuando  $y = z = 0$ , lo cual ocurre en el punto  $x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ . De forma similar, dicho plano corta al eje  $y$  cuando  $x = z = 0$ , lo cual ocurre en el punto  $y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  e interseca al eje  $z$  cuando  $x = y = 0$ , es decir, en el punto  $z = -2$ . Luego, la suma de los cuadrados de estos puntos equivale a

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (-2)^2 = 2 + 2 + 4 = 8,$$

lo que verifica lo solicitado.

**Ejemplo 3.42** Muestre que los planos tangentes a la superficie  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}$ , con  $d > 0$ , cortan a los ejes coordenados en puntos cuya suma de distancias al origen es  $d$ , es decir, esta suma es constante.

**Solución:** Defina  $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} - d^{\frac{1}{2}}$ , entonces

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Ahora, sea  $P(a, b, c)$  un punto de tangencia, entonces dicho punto está sobre la superficie (es decir, se cumple que  $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}$ ) y además el plano tangente a la superficie en  $P$  es

$$\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}}z = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \cdot a + \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}} \cdot b + \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}} \cdot c = \frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}.$$

Así, los planos tangentes a la superficie  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}$  en los puntos de tangencia  $P(a, b, c)$  tienen la forma

$$a^{-\frac{1}{2}}x + b^{-\frac{1}{2}}y + c^{-\frac{1}{2}}z = d^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora, estos planos cortan al eje  $x$  cuando  $y = z = 0$ , es decir, en el punto  $x = d^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$ . De forma análoga, cortan al eje  $y$  cuando  $x = z = 0$ , esto es en el punto  $y = d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$  e intersecan al eje  $z$  cuando  $x = y = 0$ , así  $z = d^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$ . Luego, la suma de distancias al origen de estos puntos es

$$d^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}} \left( a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} \right) = d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} = d,$$

lo que verifica lo solicitado en el ejemplo.

**Ejemplo 3.43** Considere la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  y sea  $P(a, b, c)$  un punto sobre esta esfera.

1. Pruebe que todos los planos tangentes a dicha superficie esférica en el punto  $P(a, b, c)$  son de la forma  $ax + by + cz = 49$ .
2. Según lo anterior, establezca que el plano  $2x - 6y + 3z = 49$  es tangente a la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  y diga en qué punto.
3. Halle otro plano tangente a la esfera que sea paralelo a  $2x - 6y + 3z = 49$ .

### Solución:

1. Defina  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$ , así

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f(a, b, c) = (2a, 2b, 2c).$$

Entonces, los planos tangentes a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  en el punto  $P(a, b, c)$  son de la forma

$$2ax + 2by + 2cz = 2a \cdot a + 2b \cdot b + 2c \cdot c = 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

pero como  $P(a, b, c)$  es punto de tangencia, entonces  $a^2 + b^2 + c^2 = 49$ , así, los planos anteriores son de la forma

$$ax + by + cz = 49.$$

2. Por la parte anterior, es claro que el plano  $2x - 6y + 3z = 49$  es tangente a la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  en el punto  $P(2, -6, 3)$
3. Dado que la superficie es una esfera y por la información anterior de este ejemplo, el plano paralelo buscado es  $-2x + 6y - 3z = 49$ .

## 3.6. Regla de la cadena

**Teorema 3.12** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  funciones tales que  $f = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

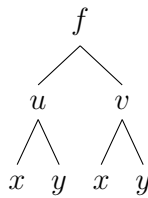
**Observación 3.15** Para una función de dos y tres variables, la regla de la cadena corresponde a:

1. Si  $f$  es una función de dos variables, es decir,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = f(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Para las derivadas anteriores, puede ser de utilidad el siguiente esquema, el cual jerarquiza las variables de las cuales depende la función  $f$ .



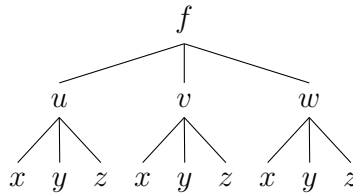
2. De forma similar, si  $f$  es una función de tres variables, esto es,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = f(u, v, w)$ ,  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  y  $w = w(x, y, z)$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Para las derivadas anteriores, puede ser de utilidad el siguiente esquema, el cual jerarquiza las variables de las cuales depende la función  $f$ .



**Ejemplo 3.44** Sea  $f(x, y) = \sqrt{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \tan(xy)}$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  usando la regla de la cadena.

**Solución:** Defina  $u(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  y  $v(x, y) = \tan(xy)$ , entonces  $f(u, v) = \sqrt{u + v}$ . Así,

usando regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \cdot \sec^2(xy) \cdot y \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} + y \sec^2(xy) \right). \end{aligned}$$

Por último, y si fuese necesario, se sustituye  $u$  y  $v$  en términos de  $x$  e  $y$ .

**Ejemplo 3.45** Sea  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ , donde  $x = e^t$  y  $y = \cos(t)$ , use la regla de cadena para calcular  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

**Solución:** En este caso es una función de varias variables, cada una de las cuales es una función de una variable. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 2xe^t + 6y(-\operatorname{sen} t) \\ &= 2e^t e^t - 6 \cos t \operatorname{sen} t \\ &= 2e^{2t} - 6 \operatorname{sen}(2t). \end{aligned}$$

Esta derivada también se puede obtener de manera simple sustituyendo  $x$  e  $y$  en términos de  $t$  en la función  $f(x, y)$ , y luego se procede a derivar la nueva función  $f(t)$ .

**Ejemplo 3.46** Sea  $w = r^2 + sv + t^3$ ,  $r = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $s = xyz$ ,  $v = xe^y$  y  $t = yz^2$ , calcule  $w_z$  en términos de  $x, y$  y  $z$ .

**Solución:** Se está solicitando  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , que por la regla de cadena es

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \\ &= 2r \cdot 2z + v \cdot xy + s \cdot 0 + 3t^2 \cdot 2zy \\ &= 4z \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + xe^y \cdot xy + 6(yz^2)^2 \cdot zy \\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5. \end{aligned}$$

### 3.6. Regla de la cadena

**Ejemplo 3.47** Sea  $F(x, y, z) = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ ,  $f$  es una función real de dos variables, con derivadas parciales de segundo orden continuas y  $n \in \mathbb{R}$ . Muestre que

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

**Solución:** Defina  $u = \frac{y}{x}$  y  $v = \frac{z}{x}$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^n f(u, v)) \\ &= nx^{n-1}f(u, v) + x^n \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \\ &= nx^{n-1}f + x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= nx^{n-1}f + x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-z}{x^2} \right) \\ &= nx^{n-1}f - x^{n-2} \left( y \frac{\partial f}{\partial u} + z \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (1). \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^n f(u, v)) \\ &= 0 \cdot f(u, v) + x^n \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \\ &= 0 + x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 \right) \\ &= x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial u} \quad (2), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^n f(u, v)) \\
 &= 0 \cdot f(u, v) + x^n \frac{\partial f}{\partial z}(u, v) \\
 &= 0 + x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 &= x^n \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x} \right) \\
 &= x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (3).
 \end{aligned}$$

Luego, al cambiar (1), (2) y (3) en la operación  $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} &= x \left( nx^{n-1} f - x^{n-2} \left( y \frac{\partial f}{\partial u} + z \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) + y \left( x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + z \left( x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
 &= nx^n f - x^{n-1} y \frac{\partial f}{\partial u} - x^{n-1} z \frac{\partial f}{\partial v} + x^{n-1} y \frac{\partial f}{\partial u} + x^{n-1} z \frac{\partial f}{\partial v} \\
 &= nx^n f(u, v) \\
 &= nx^n f \left( \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \\
 &= nF,
 \end{aligned}$$

con lo cual queda resuelto el ejemplo.

**Observación 3.16** En el ejemplo 3.47 realmente se está comprobando que  $F$  es una función homogénea de grado  $n$ , esto en relación con la definición 3.9 y la observación 3.11.

**Ejemplo 3.48** Sea  $z = f(x, y)$ , con  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Muestre que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

**Solución:** Usando la regla de la cadena note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} & y & \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
 &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} & & = -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}.
 \end{aligned}$$



### 3.6. Regla de la cadena

A partir de ello se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 &= \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \\ &= \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

De forma similar se obtiene que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2 \left( \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right).$$

Estos dos últimos resultados se sustituyen en la operación  $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ , como sigue:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \left( \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right) \\ &= \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \cos^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,\end{aligned}$$

siendo este el resultado al que se quería llegar.

**Ejemplo 3.49** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y derivable. Considere  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$ , verifique que  $xz_x + yz_y = xy + z$ .

**Solución:** En primer lugar note que

$$\begin{aligned} z_x &= y + f\left(\frac{y}{x}\right) + xf'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{-y}{x^2} \\ &= y + f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

De igual forma, observe que

$$\begin{aligned} z_y &= x + xf'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} \\ &= x + f'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

De esta forma, y a partir de los resultados anteriores, resulta que

$$\begin{aligned} xz_x + yz_y &= x\left(y + f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)\right) + y\left(x + f'\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= xy + xf\left(\frac{y}{x}\right) - yf'\left(\frac{y}{x}\right) + xy + yf'\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= xy + \underbrace{xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)}_z \\ &= xy + z. \end{aligned}$$

con lo que se verifica lo solicitado.

**Ejemplo 3.50** Considere la función  $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ , donde  $f$  es una función real de dos variables con derivadas de primer orden continuas. Compruebe que

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}.$$

**Solución:** Defina  $u = \frac{y}{x}$  y  $v = \frac{z}{x}$ . Luego, derivando la función  $F$  y usando la regla de la cadena para la función  $f$ , se llega a los siguientes tres resultados:

- $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x} \frac{\partial f}{\partial v}.$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x \ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u}.$
- $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-xy \ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.$

### 3.6. Regla de la cadena

Con ello se tiene que

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} &= x \left( \frac{y \ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + y \left( \frac{x \ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u} \right) \\
 &+ z \left( \frac{-xy \ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{xy \ln x}{z} + \frac{xy}{z} + xf - y \frac{\partial f}{\partial u} - z \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{xy \ln x}{z} + y \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{xy \ln x}{z} + z \frac{\partial f}{\partial v} \\
 &= \frac{xy \ln x}{z} + xf + \frac{xy}{z} \\
 &= F + \frac{xy}{z},
 \end{aligned}$$

con lo que se comprueba la igualdad dada.

**Ejemplo 3.51** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(u, v)$  con  $u = x^2y^2$  y  $v = xy$ , calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  suponiendo que  $f$  posee segundas derivadas parciales coninuas.

**Solución:** Primero observe que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial u} 2xy^2 + \frac{\partial f}{\partial v} y.
 \end{aligned}$$

Segundo, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial u} 2xy^2 + \frac{\partial f}{\partial v} y \right) \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u} 2xy^2 + \frac{\partial f}{\partial u} 4xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v} y + \frac{\partial f}{\partial v} \quad (1).
 \end{aligned}$$

Luego, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial f_u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 2x^2 y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} x \quad (2). \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} 2x^2 y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} x \quad (3).$$

Posteriormente, sustituya los resultados (2) y (3) en (1), obteniendo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 2x^2 y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} x \right) 2xy^2 + \frac{\partial f}{\partial u} 4xy + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} 2x^2 y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} x \right) y + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Dado que las segundas derivadas parciales de  $f$  son continuas, entonces por el teorema 3.6 se tiene que  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ , así la derivada anterior se simplifica, por lo que es equivalente a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x^3 y^3 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4xy \frac{\partial f}{\partial u} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

**Ejemplo 3.52** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(u, v)$  con  $u = x^2 + y^2$  y  $v = xy$ , verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

si  $f$  tiene segundas derivadas parciales continuas.

**Solución:** Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} y. \end{aligned}$$

### 3.6. Regla de la cadena

Luego, observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} y \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial u} 2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} y + 0 \quad (1).\end{aligned}$$

De forma similar al ejemplo anterior, concluya que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} = \frac{\partial f_u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} y \quad (2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = \frac{\partial f_v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} y \quad (3).$$

Por último, cambie las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), considerando que las segundas derivadas parciales de  $f$  son continuas, entonces por el teorema 3.6 se cumple que  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ , así se obtiene el resultado

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

**Ejemplo 3.53** Sea  $z = f\left(x^2 + y^2, \frac{x}{y}\right)$  una función real de dos variables con derivadas de primer y segundo orden continuas. Determine  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

**Solución:** Defina  $u = x^2 + y^2$  y  $v = \frac{x}{y}$ . Use como referencia el ejemplo 3.51 y el ejemplo 3.52.

Con ello, llegue a concluir los siguientes resultados:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{4x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \left( 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

**Ejemplo 3.54** Transformar la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$$

a las nuevas variables  $u = 2x - z^2$ ,  $v = \frac{y}{z}$ . Simplificar el resultado.

**Solución:** Defina  $z = z(u, v)$ , entonces usando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \left( 2 - 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{-y \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} \right),$$

con ello se tendría que

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{z_u(2 - 2zz_x) - \frac{yz_v z_x}{z^2}}{z^2} \\ &= \frac{2z^2 z_u - 2z^3 z_u z_x - yz_v z_x}{z^2} \\ \Rightarrow z_x z^2 &= 2z^2 z_u - 2z^3 z_u z_x - yz_v z_x \\ \Rightarrow z_x(z^2 + 2z^3 z_u + yz_v) &= 2z^2 z_u \\ \Rightarrow z_x &= \frac{2z^2 z_u}{z^2 + 2z^3 z_u + yz_v}. \end{aligned}$$

De forma análoga se calcula  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , cuyo resultado es

$$z_y = \frac{zz_v}{z^2 + 2z^3 z_u + yz_v}.$$

Por otro lado, si  $u = 2x - z^2$ , entonces  $x = \frac{u + z^2}{2}$  y si  $v = \frac{y}{z}$ , entonces  $y = vz$ . Realizando estos cambios en la ecuación  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{u + z^2}{2} \cdot \frac{2z^2 z_u}{z^2 + 2z^3 z_u + yz_v} + vz \cdot \frac{zz_v}{z^2 + 2z^3 z_u + yz_v} &= \frac{u + z^2}{z} \\ \Rightarrow \frac{(u + z^2)(z^2 z_u) + zv(zz_v)}{z^2 + 2z^3 z_u + vzz_v} &= \frac{u + z^2}{2z} \\ \Rightarrow \frac{uz^2 z_u + z^4 z_u + vz^2 z_v}{z^2 + 2z^3 z_u + vzz_v} &= \frac{u + z^2}{2z} \\ \Rightarrow \frac{uzz_u + z^3 z_u + vzz_v}{z + 2z^2 z_u + vz_v} &= \frac{u + z^2}{2z}, \end{aligned}$$

siendo esta última la ecuación dada en las variables  $u$  y  $v$ .

**Ejemplo 3.55** Considere la función dada por  $f(r)$ , donde  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

### 3.7. Derivada implícita

1. Pruebe que  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} f_r$ .
2. Muestre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} f_r + \frac{x_i^2}{r^2} f_{rr}$ .

#### Solución:

1. Usando regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= f_r \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \\ &= f_r \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \\ &= \frac{x_i}{r} f_r.\end{aligned}$$

2. Para verificar la segunda igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} f_r \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \right) \cdot f_r + \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{r} \\ &= \frac{r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} \cdot f_r + \frac{\partial f_r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{r} \\ &= \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \cdot f_r + f_{rr} \frac{x_i}{r} \cdot \frac{x_i}{r} \\ &= \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} f_r + \frac{x_i^2}{r^2} f_{rr}.\end{aligned}$$

## 3.7. Derivada implícita

**Teorema 3.13** Sea  $F(\vec{x}, y) = 0$  con  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función con todas sus derivadas parciales continuas tal que  $F(P) = 0$  y  $F_y(P) \neq 0$ , entonces  $F$  determina implícitamente una

función  $y = f(\vec{x})$  diferenciable tal que  $F(\vec{x}, y(\vec{x})) = 0$  y

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}.$$

**Observación 3.17** Algunos casos particulares del teorema 3.13 anterior son:

1. Si una ecuación  $F(x, y) = 0$  determina implícitamente una función diferenciable  $f$  de una variable  $x$  tal que  $y = f(x)$ , entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

2. Si una ecuación  $F(x, y, z) = 0$  determina implícitamente una función diferenciable  $f$  de dos variables  $x$  e  $y$  tal que  $z = f(x, y)$ , entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

**Ejemplo 3.56** La ecuación  $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - a \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0$  define implícitamente  $y$  como función de  $x$ , determine  $y'$  y  $y''$ .

**Solución:** Defina  $F(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - a \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Luego, por el teorema 3.13, para la primera derivada se tiene que

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} \\ &= -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x - \frac{a}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y - \frac{a}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{ay}{x^2+y^2}}{\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{ax}{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x + ay}{ax - y}. \end{aligned}$$

Para la segunda derivada se tiene que:



### 3.7. Derivada implícita

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x+ay}{ax-y} \right) \\
 &= \frac{(1+ay')(ax-y) - (x+ay)(a-y')}{(ax-y)^2} \\
 &= \frac{ax-y+a^2xy' - ayy' - ax + xy' - a^2y + ayy'}{(ax-y)^2} \\
 &= \frac{-y + a^2xy' + xy' - a^2y}{(ax-y)^2} \\
 &= \frac{-y + a^2x \left( \frac{x+ay}{ax-y} \right) + x \left( \frac{x+ay}{ax-y} \right) - a^2y}{(ax-y)^2} \\
 &= \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3},
 \end{aligned}$$

siendo este el otro resultado buscado.

**Ejemplo 3.57** Suponga que  $y = f(x)$ . Dada la relación  $xe^y + y - 1 = 0$ , muestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^{2y}(2 + xe^y)}{(1 + xe^y)^3}.$$

**Solución:** Para verificar la igualdad dada, defina  $F(x, y) = xe^y + y - 1$ , con ello se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-e^y}{xe^y + 1}.$$

Con ello se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{-e^y}{xe^y + 1} \right) \\
 &= \frac{-e^y \frac{dy}{dx} (xe^y + 1) + e^y \left( e^y + xe^y \frac{dy}{dx} \right)}{(xe^y + 1)^2} \\
 &= \frac{-e^y \left( \frac{-e^y}{xe^y + 1} \right) (xe^y + 1) + e^y \left( e^y + xe^y \left( \frac{-e^y}{xe^y + 1} \right) \right)}{(xe^y + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2y} + e^{2y} \left( 1 - \frac{xe^y}{xe^y + 1} \right)}{(xe^y + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2y} + \frac{e^{2y}}{xe^y + 1}}{(xe^y + 1)^2} \\
 &= \frac{e^{2y}(2 + xe^y)}{(1 + xe^y)^3},
 \end{aligned}$$

con lo que se demuestra lo solicitado.

**Ejemplo 3.58** Sea  $z = f(x, y)$  tal que  $x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz = 5$ , encuentre  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Solución:** Defina  $F(x, y, z) = x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5$ , entonces se tendría que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-2xz^2 - y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-2xy - 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}.$$

**Ejemplo 3.59** La ecuación  $F\left(\sqrt{x^2 + y + z}, x^2y^2z^2\right) = 0$  define implícitamente a  $z = f(x, y)$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , en términos de las derivadas parciales de  $F$ .

**Solución:** Sean las funciones  $u = \sqrt{x^2 + y + z}$  y  $v = x^2y^2z^2$ , lo cual implica que  $F(u, v) = 0$ . Esto, a su vez, determina que para obtener  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  se debe usar, además del teorema 3.13, la regla de la cadena. En efecto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\frac{x F_u}{\sqrt{x^2 + y + z}} + 2xy^2z^2 F_v}{\frac{F_u}{2\sqrt{x^2 + y + z}} + 2x^2y^2z F_v} = \frac{-2x F_u - 4xy^2z^2 F_v \sqrt{x^2 + y + z}}{F_u + 4x^2y^2z F_v \sqrt{x^2 + y + z}}.$$

De forma similar se obtiene que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\frac{F_u}{2\sqrt{x^2 + y + z}} + 2x^2y^2z F_v}{\frac{F_u}{2\sqrt{x^2 + y + z}} + 2x^2y^2z F_v} = \frac{-F_u - 4x^2y^2z F_v \sqrt{x^2 + y + z}}{F_u + 4x^2y^2z F_v \sqrt{x^2 + y + z}}.$$

**Ejemplo 3.60** Suponga que la ecuación  $F(x + y^{-1}z, y + x^{-1}z) = 0$ , con  $F$  una función diferenciable, define implícitamente  $z = f(x, y)$ . Muestre la igualdad

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**Solución:** Utilizando el teorema 3.13, la igualdad dada se puede reescribir de la siguiente

### 3.7. Derivada implícita

forma.

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy &\Rightarrow x \cdot -\frac{F_x}{F_z} + y \cdot -\frac{F_y}{F_z} = z - xy \\ &\Rightarrow \frac{-xF_x - yF_y}{F_z} = z - xy. \end{aligned}$$

Con ello, se deben calcular las derivadas parciales  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ , para lo cual se define  $u = x + y^{-1}z$  y  $v = y + x^{-1}z$ , de esta forma se obtiene que

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = F_u \cdot 1 + F_v \cdot -\frac{z}{x^2} = F_u - \frac{z}{x^2} F_v, \\ F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = F_u \cdot \frac{-z}{y^2} + F_v \cdot 1 = F_v - \frac{z}{y^2} F_u, \\ F_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = F_u \cdot \frac{1}{y} + F_v \cdot \frac{1}{x} = \frac{F_u}{y} + \frac{F_v}{x}. \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{-xF_x - yF_y}{F_z} &= \frac{-x \left( F_u - \frac{z}{x^2} F_v \right) - y \left( F_v - \frac{z}{y^2} F_u \right)}{\frac{F_u}{y} + \frac{F_v}{x}} \\ &= \frac{-xF_u + \frac{z}{x} F_v - yF_v + \frac{z}{y} F_u}{\frac{F_u}{y} + \frac{F_v}{x}} \\ &= \frac{\frac{-x^2 y F_u + y z F_v - x y^2 F_v + x z F_u}{xy}}{\frac{x F_u + y F_v}{xy}} \\ &= \frac{-x^2 y F_u + y z F_v - x y^2 F_v + x z F_u}{x F_u + y F_v} \\ &= \frac{(y z F_v + x z F_u) + (-x^2 y F_u - x y^2 F_v)}{x F_u + y F_v} \\ &= \frac{z(y F_v + x F_u) - xy(x F_u + y F_v)}{x F_u + y F_v} \\ &= \frac{(z - xy)(x F_u + y F_v)}{x F_u + y F_v} \\ &= z - xy, \end{aligned}$$

lo que demuestra lo solicitado.

**Ejemplo 3.61** Pruebe que la función implícita  $z = f(x, y)$  definida por

$$F \left( \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \arctan \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) = 0,$$

satisface la identidad

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

**Solución:** Usando el teorema 3.13, la identidad dada se puede reescribir como

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 &\Rightarrow x \cdot -\frac{F_y}{F_z} - y \cdot -\frac{F_x}{F_z} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{-xF_y + yF_x}{F_z} = 0 \\ &\Rightarrow -xF_y + yF_x = 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior, basta probar que  $-xF_y + yF_x = 0$ . Con ese fin, defina  $u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  y  $v = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ . Entonces, por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x F_u}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x z F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y F_u}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y z F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Así se tendría que

$$\begin{aligned} -xF_y + yF_x &= -x \left( \frac{y F_u}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y z F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &+ y \left( \frac{x F_u}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x z F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{-xy F_u}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{xyz F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy F_u}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &- \frac{xyz F_v}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

### 3.7. Derivada implícita

**Ejemplo 3.62** Suponga que la ecuación  $F(xy, y^3 - 3xyz) = 0$  define implícitamente  $z = f(x, y)$ . Verifique la igualdad

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

**Solución:** Use como referencia el ejemplo 3.61 resuelto anteriormente. Por el teorema 3.13 se establece que la igualdad  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$  es equivalente a la igualdad

$$-x^2 F_x + xy F_y + y^2 F_z = 0.$$

Para determinar las derivadas parciales de  $F$ , defina  $u = xy$  y  $v = y^3 - 3xyz$ , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y F_u - 3yz F_v, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x F_u + (3y^2 - 3xz) F_v, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 - 3xy F_v. \end{aligned}$$

A partir de estos resultados se cumple que

$$\begin{aligned} -x^2 F_x + xy F_y + y^2 F_z &= -x^2 (y F_u - 3yz F_v) + xy (x F_u + (3y^2 - 3xz) F_v) + y^2 (-3xy F_v) \\ &= -x^2 y F_u + 3x^2 yz F_v + x^2 y F_u + 3xy^3 F_v - 3x^2 yz F_v - 3xy^3 F_v \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.63** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable. La ecuación

$$F(x \operatorname{sen} y \cos z, y \operatorname{sen} z \cos y, z \operatorname{sen} x \cos y) = 0,$$

define implícitamente la función derivable  $z = f(x, y)$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en términos de las derivadas parciales de  $F$ .

**Solución:** Use como referencia el ejemplo 3.59. Defina  $u = x \operatorname{sen} y \cos z$ ,  $v = y \operatorname{sen} z \cos y$  y  $w = z \operatorname{sen} x \cos y$ . Entonces, usando regla de la cadena, las primeras derivadas parciales de  $F$  son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = F_u \cdot \operatorname{sen} y \cos z + F_v \cdot 0 + F_w \cdot z \cos x \cos y.$$

$$\blacksquare \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = F_u \cdot \cos y \cos z + F_v \cdot (\sin z \cos y - y \sin z \sin y)$$

$$-F_w \cdot z \sin x \sin y.$$

$$\blacksquare \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = -F_u \cdot x \sin y \sin z + F_v \cdot y \cos z \cos y + F_w \cdot \sin x \cos y.$$

Con estos tres resultados y usando el teorema 3.13, se cumple que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-F_u \cdot \sin y \cos z - F_w \cdot z \cos x \cos y}{-F_u \cdot x \sin y \sin z + F_v \cdot y \cos z \cos y + F_w \cdot \sin x \cos y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-F_u \cdot \cos y \cos z - F_v \cdot (\sin z \cos y - y \sin z \sin y) + F_w \cdot z \sin x \sin y}{-F_u \cdot x \sin y \sin z + F_v \cdot y \cos z \cos y + F_w \cdot \sin x \cos y},$$

siendo estas las derivadas de  $z$  respecto a  $x$  e  $y$ , respectivamente, en términos de las derivadas parciales de  $F$ .

**Ejemplo 3.64** La ecuación  $F(x, y, z) = xyz - e^z = 0$  define implícitamente a  $z = f(x, y)$ . Muestre que en el punto  $P(e^2, \frac{1}{2}, 2)$  se cumple el “Teorema de Schwarz”, el cual establece que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

**Solución:** Usando el teorema 3.13 sobre la derivada implícita, se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-yz}{xy - e^z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \left( e^2, \frac{1}{2}, 2 \right) = \frac{-yz}{xy - e^z} \Big|_{(e^2, \frac{1}{2}, 2)} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot 2}{e^2 \cdot \frac{1}{2} - e^2} = \frac{2}{e^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-xz}{xy - e^z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} \left( e^2, \frac{1}{2}, 2 \right) = \frac{-xz}{xy - e^z} \Big|_{(e^2, \frac{1}{2}, 2)} = \frac{-e^2 \cdot 2}{e^2 \cdot \frac{1}{2} - e^2} = 4.$$

### 3.7. Derivada implícita

Posteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-yz}{xy - e^z} \right) \\
 &= \frac{\left( -z - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) (xy - e^z) - (-yz) \left( x - e^z \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{(xy - e^z)^2} \\
 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \left( e^2, \frac{1}{2}, 2 \right) &= \frac{\left( -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \left( \frac{-e^2}{2} \right) - \left( \frac{-1}{2} \cdot 2 \right) \left( e^2 - e^2 \cdot 4 \right)}{\left( \frac{-e^2}{2} \right)^2} \\
 &= \frac{-4 \cdot \frac{-e^2}{2} - 3e^2}{\frac{e^4}{4}} \\
 &= -\frac{4}{e^2}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, y de forma similar, se calcula

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-xz}{xy - e^z} \right) \\
 &= \frac{\left( -z - x \frac{\partial z}{\partial x} \right) (xy - e^z) - (-xz) \left( y - e^z \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(xy - e^z)^2} \\
 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left( e^2, \frac{1}{2}, 2 \right) &= \frac{\left( -2 - e^2 \cdot \frac{2}{e^2} \right) \left( \frac{-e^2}{2} \right) - \left( -e^2 \cdot 2 \right) \left( \frac{1}{2} - e^2 \cdot \frac{2}{e^2} \right)}{\left( \frac{-e^2}{2} \right)^2} \\
 &= \frac{-4 \cdot \frac{-e^2}{2} - 3e^2}{\frac{e^4}{4}} \\
 &= -\frac{4}{e^2},
 \end{aligned}$$

con lo que se verifica la igualdad establecida por el “Teorema de Schwarz”.

**Ejemplo 3.65** Si la ecuación  $F(ax + by + cz) = x^2 + y^2 + z^2$  define implícitamente a  $z = f(x, y)$ , siendo  $f$  y  $F$  diferenciables, determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

**Solución:** Defina la ecuación

$$G(x, y, z) = F(ax + by + cz) - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

entonces por el teorema 3.13 se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}}.$$

Luego, tomando  $u = ax + by + cz$ , observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} - 2x \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - 2x \\ &= aF_u - 2x.\end{aligned}$$

De forma similar se determina que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = cF_u - 2z.$$

Así se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{aF_u - 2x}{cF_u - 2z} = \frac{2x - aF_u}{cF_u - 2z}.$$

**Ejemplo 3.66** Sea  $z = f\left(z \cdot g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\right)$ , donde  $z$  define implícitamente una función que depende de  $x$  e  $y$ , además  $f$  y  $g$  son derivables. Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

**Solución:** Defina la nueva función

$$F(x, y, z) = f\left(z \cdot g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\right) - z,$$

además sean  $u = \frac{y}{x}$ ,  $v = \frac{z}{x}$  y  $w = z \cdot g(u, v)$ . Con ello y el teorema 3.13 observe que  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ .

Así se calcula las derivadas parciales siguientes:

- Para  $\frac{\partial F}{\partial x}$  se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \left( z \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= f_w \cdot \left( z \cdot \left( -\frac{yg_u}{x^2} - \frac{zg_v}{x^2} \right) \right) \\ &= -\frac{zf_w}{x^2} (yg_u + zg_v).\end{aligned}$$



### 3.7. Derivada implícita

- Para  $\frac{\partial F}{\partial z}$  se cumple que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} - 1 \\
 &= \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} - 1 \\
 &= \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \left( 1 \cdot g + z \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) - 1 \\
 &= f_w \cdot \left( g + z \cdot \left( g_u \cdot 0 + \frac{g_v}{x} \right) \right) - 1 \\
 &= \frac{f_w}{x} (xg + zg_v) - 1 \\
 &= \frac{f_w}{x} \left( xg + zg_v - \frac{x}{f_w} \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente se tendría que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-\frac{zf_w}{x^2}(yg_u + zg_v)}{\frac{f_w}{x} \left( xg + zg_v - \frac{x}{f_w} \right)} = \frac{z(yg_u + zg_v)}{x \left( xg + zg_v - \frac{x}{f_w} \right)}.$$

**Ejemplo 3.67** Sea  $u = f(w)$  una función con derivada continua, donde  $w$  está definido implícitamente por medio de la ecuación  $w^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Verifique la igualdad

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = w f'(w).$$

**Solución:** Para usar el teorema 3.13, defina la función  $F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ . Luego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{-2x}{-2w} = \frac{x}{w} \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{x}{w} f'(w).$$

Regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{-2y}{-2w} = \frac{y}{w} \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{y}{w} f'(w).$$

Regla de la cadena

- De igual forma se llega a que  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{w} f'(w)$ .

Ahora, usando estos tres últimos resultados para sustituirlos en la igualdad que se debe verificar, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} &= x \cdot \frac{x}{w} f'(w) + y \cdot \frac{y}{w} f'(w) + z \cdot \frac{z}{w} f'(w) \\
 &= \frac{1}{w} f'(w) \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=w^2} \\
 &= w f'(w).
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.68** Suponga que la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente a  $z = f(x, y)$  como una función diferenciable en un entorno del punto  $P$ . Determine  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  en términos de las derivadas parciales de  $F$ .

**Solución:** Por el teorema 3.13 sobre la derivada de la función implícita se tiene que  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$

y  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ . Posteriormente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_z} \right) \\
 &= -\frac{\frac{\partial F_x}{\partial x} F_z - F_x \frac{\partial F_z}{\partial x}}{F_z^2} \\
 &= -\frac{(F_{xx} + F_{xz} \frac{\partial z}{\partial x}) F_z - F_x (F_{zx} + F_{zz} \frac{\partial z}{\partial x})}{F_z^2} \\
 &= -\frac{\left( F_{xx} + F_{xz} \cdot -\frac{F_x}{F_z} \right) F_z - F_x \left( F_{zx} + F_{zz} \cdot -\frac{F_x}{F_z} \right)}{F_z^2} \\
 &= \frac{-F_{xx} F_z^2 + F_{xz} F_x F_z + F_{zx} F_x F_z - F_x^2 F_{zz}}{F_z^3} \\
 &= \frac{2F_{xz} F_x F_z - F_{xx} F_z^2 - F_x^2 F_{zz}}{F_z^3}.
 \end{aligned}$$

De forma similar se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_z} \right) \\
 &= -\frac{\frac{\partial F_x}{\partial y} F_z - F_x \frac{\partial F_z}{\partial y}}{F_z^2} \\
 &= -\frac{\left( F_{xy} + F_{xz} \frac{\partial z}{\partial y} \right) F_z - F_x \left( F_{zy} + F_{zz} \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{F_z^2} \\
 &= -\frac{\left( F_{xy} + F_{xz} \cdot -\frac{F_y}{F_z} \right) F_z - F_x \left( F_{zy} + F_{zz} \cdot -\frac{F_y}{F_z} \right)}{F_z^2} \\
 &= \frac{-F_{xy} F_z^2 + F_{xz} F_y F_z + F_{zy} F_x F_z - F_{zz} F_x F_y}{F_z^3}.
 \end{aligned}$$

### 3.7. Derivada implícita

**Ejemplo 3.69** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 0 \\ xy + uv = 0 \end{cases},$$

suponga que  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$  y  $y$ . Calcule  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

**Solución:** Según lo establecido en el ejemplo se tiene que  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$ . Para hallar

$\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , derive parcialmente el sistema dado respecto a la variable  $x$ , esto es:

$$\begin{cases} 2x + 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y + v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases},$$

el cual, simplificado y usando la notación  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$  y  $\frac{\partial v}{\partial x} = v_x$  por comodidad, es equivalente a

$$\begin{cases} uu_x - vv_x = -x \\ vu_x + uv_x = -y \end{cases}.$$

Este último sistema de ecuaciones lineales se resuelve para las incógnitas  $u_x$  y  $u_y$ . En particular se va usar la *Regla de Cramer*, esto es:

$$\begin{cases} uu_x - vv_x = -x \\ vu_x + uv_x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix},$$

entonces

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -x & -v \\ -y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{-xu - yv}{u^2 + v^2}.$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} u & -x \\ v & -y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{-yu + xv}{u^2 + v^2}.$$

Ahora, para determinar  $\frac{\partial u}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , análogamente a lo anterior, derive parcialmente el sistema dado al inicio respecto a la variable  $y$ , simplifique y al final se obtiene

$$\begin{cases} uu_y - vv_y = -y \\ vu_y + uv_y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Utilizando *Regla de Cramer* se concluye que:

$$u_y = \frac{-yu - xv}{u^2 + v^2} \quad \text{y} \quad v_y = \frac{-xu + yv}{u^2 + v^2}.$$

**Ejemplo 3.70** Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - u - v = 0 \\ xu + yv = 1 \end{cases},$$

suponga que  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$  y  $y$ . Calcule  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

**Solución:** Siga como referencia el ejemplo 3.69 resuelto anteriormente. Concluya que para determinar  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x}$  se llega al sistema

$$\begin{cases} -u_x - v_x = -1 \\ xu_x + yv_x = -u \end{cases},$$

cuya solución es:

$$u_x = \frac{y + u}{y - x} \quad \text{y} \quad v_x = \frac{x + u}{x - y}.$$

Además, para hallar  $\frac{\partial u}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$  se llega al sistema

$$\begin{cases} -u_y - v_y = -1 \\ xu_y + yv_y = -v \end{cases},$$

cuya solución es:

$$u_y = \frac{y + v}{y - x} \quad \text{y} \quad v_y = \frac{x + v}{x - y}.$$

### 3.7. Derivada implícita

**Ejemplo 3.71** Determine la derivada direccional de mayor crecimiento de la función  $z = f(x, y)$ , la cual está dada implícitamente por la ecuación

$$\arctan(x + y + z) + 3xyz + z = 0$$

en el origen de coordenadas.

**Solución:** Defina la función  $F(x, y, z) = \arctan(x + y + z) + 3xyz + z$ . Luego, por el teorema 3.11, el crecimiento máximo de la derivada direccional de la función  $z = f(x, y)$  en el origen está dado por el valor  $\|\nabla f(0, 0)\|$ . Para hallar dicho gradiente se necesitan las derivadas parciales de  $z = f(x, y)$ , las cuales, por el teorema de la derivada implícita, están dadas por:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{1+(x+y+z)^2} + 3yz}{\frac{1}{1+(x+y+z)^2} + 3xy + 1}. \\ \bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{1}{1+(x+y+z)^2} + 3xz}{\frac{1}{1+(x+y+z)^2} + 3xy + 1}. \end{aligned}$$

Ahora, tomando  $x = y = 0$  (pues se solicita la derivada direccional en el origen), de la ecuación  $\arctan(x + y + z) + 3xyz + z = 0$  se deduce que  $z = 0$ , con ello se tiene que

$$\nabla f(0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Posteriormente, la derivada direccional solicitada viene dada por

$$\|\nabla f(0, 0)\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Ejemplo 3.72** La ecuación  $x^2 - y^2 + ze^z = 0$  define implícitamente la función  $z = f(x, y)$  alrededor del punto  $P(1, 1)$ .

1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de  $f$  en  $P$  es nula.
2. Hallar el plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(1, 1, f(P))$  y verifique que dicho plano contiene al origen.

**Solución:**

1. Se debe determinar la dirección del vector  $\vec{u}$  tal que  $D_{\vec{u}}f(P) = 0$ , es decir,

$$\nabla f(P) \cdot \vec{u} = 0,$$

considerando que  $\vec{u}$  debe ser unitario. Luego, sea  $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + ze^z$ , así  $\nabla f(x, y)$  está dado por las derivadas parciales de  $z = f(x, y)$ , que por el teorema de la derivada implícita se tiene que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{e^z + ze^z}. \\ \blacksquare \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{e^z + ze^z}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que  $x = 1$  y  $y = 1$ , entonces, de la ecuación  $x^2 - y^2 + ze^z = 0$  se despeja  $z$ , como sigue:

$$(1)^2 - (1)^2 + ze^z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Con estos datos, el gradiente de  $z = f(x, y)$  en el punto  $P(1, 1)$  está dado por

$$\nabla f(P) = (-2, 2).$$

Tome  $\vec{u} = (a, b)$  y dado que  $\nabla f(P) \cdot \vec{u} = 0$ , se obtiene que  $-2a + 2b = 0 \Rightarrow -a + b = 0$ . Por otro lado, como  $\vec{u}$  es un vector unitario, es claro que  $a^2 + b^2 = 1$ . De esta manera se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} ,$$

de donde se obtiene que  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Por tanto, la dirección donde

$$D_{\vec{u}}f(P) = 0 \text{ es cuando } \vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ o bien } \vec{u} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

2. Defina la función  $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ . Luego, considerando el teorema de la derivada implícita, el gradiente de  $g$  es

$$\nabla g(x, y, z) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \left( -\frac{2x}{e^z + ze^z}, \frac{2y}{e^z + ze^z}, -1 \right).$$

El punto de tangencia viene dado por  $(1, 1, f(P)) = (1, 1, 0)$ , por tanto

$$\nabla g(1, 1, 0) = (-2, 2, -1),$$

con lo cual el plano tangente buscado es

$$-2x + 2y - z = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot -1 \Rightarrow -2x + 2y - z = 0.$$

Además, es claro que este plano pasa por el origen.

## Ejercicios

**Ejercicio 76** Halle la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2y + e^{x^2+y^2}$  en el punto donde  $x = 1$  y  $y = 1$ .

**Ejercicio 77** Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = 1 - x^2 - 2y^2$  en el punto donde  $P(1, \sqrt{2}, -4)$ . Además verifique que dicho plano contiene la recta que pasa por el punto  $(1, 0, 4)$  con dirección  $(1, \sqrt{2}, -10)$ .

**Ejercicio 78** Determine la ecuación del plano tangente a la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  en el punto  $P(0, \sqrt{6}, 0)$ . Además verifique que dicho plano corta al cono  $y^2 = x^2 + z^2$  en un círculo. Escriba una parametrización para este círculo.

**Ejercicio 79** Determine la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^2$  que sea paralelo al plano  $3x + 8y - 5z = 10$ .

**Ejercicio 80** Halle la ecuación de los dos planos tangentes a la superficie  $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x = 0$  que sean paralelos al plano  $z = 0$ .

**Ejercicio 81** Determine los dos puntos sobre la superficie  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  en las cuales el plano tangente es normal al vector  $\vec{v} = (1, 1, -2)$ .

**Ejercicio 82** Halle la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + xy$  que sea perpendicular a los planos  $x + y - z = 3$  y  $2x - y + z = 4$ .

**Ejercicio 83** Halle la ecuación del plano tangente a la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ . Luego verifique que el volumen del tetraedro acotado por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y dicho plano tangente es  $V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$ .

**Ejercicio 84** Suponga que la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente la superficie  $z = f(x, y)$  alrededor de un punto  $P(a, b, c)$ . Muestre que la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $P$  está dada por

$$xF_x + yF_y + zF_z = aF_x + bF_y + cF_z,$$

donde  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  están evaluadas en el punto  $P$ . **Sugerencia:** puede ayudarle la resolución de la parte dos del ejemplo 3.72.

**Ejercicio 85** Sea la función  $z = f(x^2 + y, \ln(x^2 + y))$ . Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 2x \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Ejercicio 86** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x, y, z) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x),$$

donde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Verifique que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = xyz.$$

**Ejercicio 87** Suponga que la función  $z = f(x, y)$  satisface la igualdad de Laplace dada por  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . Muestre que  $z = f(x - 2y, 2x + y)$  también satisface la igualdad de Laplace.

**Ejercicio 88** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función con segundas derivadas parciales continuas dada por  $f(u, v)$ , donde  $u = xy$  y  $v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ . Muestre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = (x^2 + y^2) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right).$$

**Ejercicio 89** Considere la función  $F(x, y) = e^x \cos y + f(x + y, x - y)$ , donde  $f(u, v)$  es una función diferenciable. Muestre que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} - e^x \cos y\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + e^x \sin y\right)^2 = 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

**Ejercicio 90** Usando el cambio de variables  $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  y  $v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , transforme la ecuación

$$(x + y) \frac{\partial f}{\partial x} - (x - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$



### 3.7. Derivada implícita

**Ejercicio 91** Usando el cambio de variables  $u = x^2 - y^2$  y  $v = 2xy$ , transforme la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

**Ejercicio 92** Considere la función  $z = xf(x+y) + yg(x+y)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones con derivadas de segundo orden continuas. Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

**Ejercicio 93** Considere la función  $z = f(x, y)$  con  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Muestre que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Ejercicio 94** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(u, v)$ , donde  $u = e^x \cos y$  y  $v = e^x \sin y$ . Muestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{2x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right).$$

**Ejercicio 95** Sea  $z = f(x^2 + y^2, 2xy)$  una función diferenciable. Determine  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**Ejercicio 96** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, la cual satisface que

$$u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Sea  $z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ , siempre que  $xy \neq 0$ . Verifique que se cumple la igualdad

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2u \frac{\partial f}{\partial u},$$

donde  $u = \frac{y}{x}$  y  $v = \frac{x}{y}$ .

**Ejercicio 97** Sea  $u$  una función definida por  $u(x, y, z) = f(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ , donde  $f$  es una función diferenciable. Verifique la igualdad

$$xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( \frac{y^2 - x^2}{z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

**Ejercicio 98** Suponga que la ecuación  $F(x - y, y - z, z - x) = 0$  con  $F(u, v, w)$  una función diferenciable, define implícitamente a  $z = f(x, y)$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**Ejercicio 99** Asuma que  $F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right) = 0$ , donde  $F(u, v, w)$  es una función diferenciable, define implícitamente a  $z = f(x, y)$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

**Ejercicio 100** Suponga que la ecuación  $z^2 + x^3 + 5x^2y = 5xyz$  define implícitamente la función diferenciable  $z = f(x, y)$ . Suponiendo que  $f(1, 1) = 2$ , determine el valor numérico de  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .

**Ejercicio 101** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. La ecuación  $F(x + z, x) = 0$  define implícitamente la función derivable  $z = f(x, y)$ . Si  $F_{uv} = F_{vu}$ , en donde  $u = x + z$  y  $v = x$ , determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  en términos de las derivadas parciales de  $F$ . Simplifique los resultados.

**Ejercicio 102** Suponga que la ecuación  $F(x + y + z, ax + by) = 0$ , para  $a$  y  $b$  constantes, con  $F$  una función diferenciable, define implícitamente la función  $z = f(x, y)$ . Compruebe que se cumple la igualdad

$$b \frac{\partial z}{\partial x} - a \frac{\partial z}{\partial y} = a - b.$$

**Ejercicio 103** Suponga que la ecuación  $F\left(\sin\left(\frac{x}{z}\right), \cos(yz)\right) = 0$ , con  $F$  una función diferenciable, define implícitamente la función derivable  $z = f(x, y)$ . Verifique que se cumple la igualdad

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

**Ejercicio 104** Suponga que la función  $F(xy, y^3 - 3xyz) = 0$  define de forma implícita a  $z = f(x, y)$ , donde  $F$  tiene derivadas parciales continuas. Verifique que se cumple la igualdad

$$-x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = y^2.$$

**Ejercicio 105** Suponga que la ecuación  $F\left(x^2 + y^2 - z^2, \frac{xy}{z}\right) = 0$ , con  $F$  una función diferenciable, define de forma implícita la función  $z = f(x, y)$ . Verifique que se cumple la igualdad

$$x(y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y(z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + z(x^2 - y^2) = 0.$$

# Capítulo 4

## Aplicaciones de las Derivadas Parciales

### 4.1. Máximos y mínimos locales

**Definición 4.1 (Extremos locales)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que:

1.  $f$  tiene un máximo local en el punto  $P \in \mathbb{R}^n$  si existe un entorno abierto<sup>1</sup>  $R$  tal que  $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(P)$  para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in R$ . Si la desigualdad anterior se mantiene para todo  $(x_1, \dots, x_n)$  en el dominio de  $f$  se dice que  $P$  es un máximo absoluto.
2.  $f$  tiene un mínimo local en el punto  $P \in \mathbb{R}^n$  si existe un entorno abierto  $R$  tal que  $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(P)$  para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in R$ . Si la desigualdad anterior se mantiene para todo  $(x_1, \dots, x_n)$  en el dominio de  $f$  se dice que  $P$  es un mínimo absoluto.

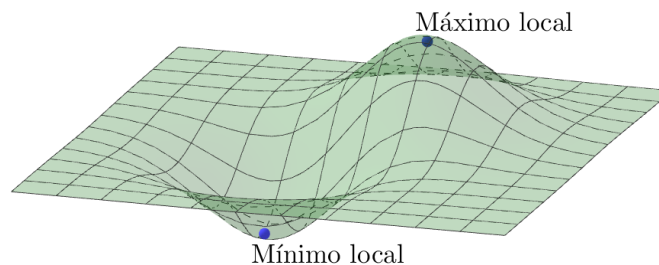


Figura 4.1: Extremos locales

**Definición 4.2** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función, se dice que  $P \in \mathbb{R}^n$  es un punto crítico de  $f$  si ocurre una de las siguientes condiciones:

1.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . También se escribe  $\nabla f(P) = \vec{0}$ .

<sup>1</sup>Intuitivamente, un entorno (también llamado vecindario) de un punto  $P$  es un conjunto puntos que contiene al punto  $P$  y que pueden estar tan cerca como se quiera a dicho punto.

2.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$  no exista, para algún  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 4.1** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función con todas sus derivadas parciales de primer orden continuas y  $U$  un conjunto abierto, suponga además que  $P \in U$  es un máximo o un mínimo local, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

En otras palabras, un extremo local debe ser un punto crítico.

**Observación 4.1** Un punto crítico que no es máximo ni mínimo local se llama un punto de silla o punto de ensilladura.

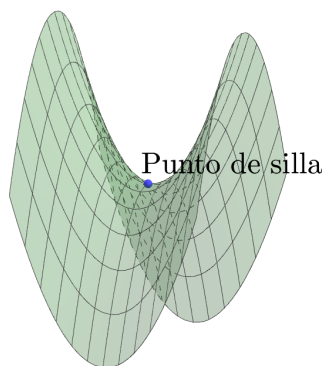


Figura 4.2: Punto de silla

### 4.1.1. Prueba de la segunda derivada en $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 4.2** Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivadas de segundo orden continuas y  $U$  un conjunto abierto, suponga además que  $P \in U$  es un punto crítico y sea

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix},$$

entonces,

1.  $P$  es un máximo local de  $f$  si  $|H_f(P)| > 0$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ .
2.  $P$  es un mínimo local de  $f$  si  $|H_f(P)| > 0$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ .
3.  $P$  es un punto de silla de  $f$  si  $|H_f(P)| < 0$ .
4. Si  $|H_f(P)| = 0$ , el criterio no decide.

**Observación 4.2** Dos aspectos a considerar del teorema anterior son:

1. La matriz  $H_f$  descrita en el teorema anterior se conoce como Hessiano ordinario de  $f$  y  $|H_f|$  como el determinante de la matriz Hessiana de segundo orden.
2. En algunos textos se escribe  $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  y  $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , entonces es claro que  $|H_f| = AC - B^2$  y lo llaman el método del discriminante.

**Ejemplo 4.1** Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = 6xy - 2x^2y - 3xy^2$ . Determine los extremos locales de  $f$  y clasifíquelos.

**Solución:** Primero se obtienen los puntos críticos, esto es:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \vec{0} \\ \Rightarrow (6y - 4xy - 3y^2, 6x - 2x^2 - 6xy) &= (0, 0),\end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 6y - 4xy - 3y^2 = 0 & \Rightarrow \begin{cases} y(6 - 4x - 3y) = 0 & (1) \\ 6x - 2x^2 - 6xy = 0 & (2) \end{cases} \end{cases}.$$

De (1) se obtiene que  $y = 0$  o  $y = \frac{6 - 4x}{3}$ . Estos dos casos se estudian por separado como sigue.

1. Si  $y = 0$ , al sustituir en (2) se obtiene que

$$\begin{aligned}6x - 2x^2 &= 0 \\ \Rightarrow 2x(3 - x) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 3.\end{aligned}$$

Consecuentemente se tiene que los puntos críticos obtenidos son  $P_1(0, 0)$  y  $P_2(3, 0)$ .

2. Si  $y = \frac{6 - 4x}{3}$ , al sustituir en (2) se cumple que

$$\begin{aligned}6x - 2x^2 - 6x \left( \frac{6 - 4x}{3} \right) &= 0 \\ \Rightarrow 6x^2 - 6x &= 0 \\ \Rightarrow 6x(x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1,\end{aligned}$$

de donde se deduce que los puntos críticos son  $P_3(0, 2)$  y  $P_4(1, 2/3)$ .

Segundo, para clasificar los cuatro puntos críticos encontrados se usa el Hessiano ordinario de  $f$ , esto es:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y & 6 - 4x - 6y \\ 6 - 4x - 6y & -6x \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene la siguiente clasificación de los puntos críticos.

- $|H_f(0, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$ , por lo que  $f(0, 0) = 0$  es un punto de silla.
- $|H_f(3, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = -36 < 0$ , por lo que  $f(3, 0) = 0$  es un punto de silla.
- $|H_f(0, 2)| = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$ , por lo que  $f(0, 2) = 0$  es un punto de silla.
- $|H_f(1, 2/3)| = \begin{vmatrix} -8/3 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0$ , y dado que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(1, \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3} < 0$ , entonces  $f \left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$  es un máximo local.

**Ejemplo 4.2** Sea  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$  una función de dos variables definida en  $\mathbb{R}^2$ . Halle y clasifique sus extremos.

**Solución:** Use como referencia el ejemplo 4.1 hecho anteriormente. Determine que los puntos críticos encontrados son  $P_1(-2, -1)$ ,  $P_2(-1, -2)$ ,  $P_3(1, 2)$  y  $P_4(2, 1)$ . Posteriormente, para poder clasificarlos, el Hessiano ordinario de  $f$  es

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

de aquí se tiene lo siguiente:

- $|H_f(-2, -1)| = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ , por lo que  $f(-2, -1)$  produce un punto máximo.
- $|H_f(-1, -2)| = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = -108 < 0$ , por lo que  $f(-1, -2)$  produce un punto de silla.

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

- $|H_f(1, 2)| = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -108 < 0$ , por lo que  $f(1, 2)$  produce un punto de silla.
- $|H_f(2, 1)| = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ , por lo que  $f(2, 1)$  produce un punto mínimo.

**Ejemplo 4.3** Determine los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ . Luego, clasifique el punto  $(0, 0)$ .

**Solución:** No es difícil obtener que los puntos críticos son  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$  y  $P_3(-1, -1)$ . Para clasificar el punto  $P_1(0, 0)$ , el Hessiano ordinario de  $f$  está dado por

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que  $|H_f(0, 0)| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ , por tanto el criterio no decide, consecuentemente, se debe hacer un análisis extra. Este consiste en evaluar la función  $f$  en el punto crítico hallado, el cual es  $P_1(0, 0)$ , así,  $f(0, 0) = 0$ . Ahora, como el valor de la función en  $P_1(0, 0)$  es cero, se deduce que:

- Si en cada vecindario de  $P_1(0, 0)$  la función  $f$  solo obtiene valores mayores que cero (positivos), entonces  $P_1$  es un punto mínimo.
- Si en cada vecindario de  $P_1(0, 0)$  la función  $f$  solo obtiene valores menores que cero (negativos), entonces  $P_1$  es un punto máximo.
- Si en un vecindario de  $P_1(0, 0)$  la función  $f$  obtiene valores positivos y negativos, entonces  $P_1$  es un punto de silla.

Para realizar el análisis anterior, se consideran a conveniencia vecindarios del punto  $P_1(0, 0)$  de la forma  $(t, 0)$ ,  $(0, t)$  y  $(t, -t)$ , cuando  $t$  tiende a cero y se indagan sus valores en la función  $f$ , esto es:

- $f(t, 0) = t^4 - t^2 = t^2(t - 1)(t + 1)$ . Acá se identifica que los valores de  $f(t, 0)$  son de signo negativo para  $t \in ] - 1, 1[$ , es decir, siempre es negativo para valores de  $t$  cercanos a cero.
- $f(0, t) = t^4 - t^2 = t^2(t - 1)(t + 1)$ . Al igual que el anterior, los valores de  $f(t, 0)$  son de signo negativo para  $t \in ] - 1, 1[$ , con ello, siempre es negativo para valores de  $t$  cercanos a cero.
- $f(t, -t) = 2t^4 > 0$ , es decir, siempre es positivo para valores de  $t$  cercanos a cero.

De esta forma, se concluye que  $P_1(0, 0)$  es un punto de ensilladura.

**Teorema 4.3** Sea  $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $R$  es un conjunto cerrado y acotado, entonces existen puntos  $P, P' \in R$  tales que

$$f(P) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq f(P'), \quad \text{para todo } (x_1, \dots, x_n) \in R,$$

es decir,  $f$  posee extremos locales en  $R$ .

**Observación 4.3** En relación con el teorema anterior, suponga que  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  tiene todas las derivadas parciales de primer orden en el interior de la región  $R$  y la frontera de  $R$  se puede ver como la unión finita de curvas derivables en casi todas partes. El procedimiento para encontrar máximos y mínimos locales es el siguiente:

1. Buscar los puntos críticos en el interior del dominio y verificar si corresponden a máximos o mínimos locales.
2. Parametrizar cada una de las curvas que definen la frontera para luego buscar, si existen, los máximos o mínimos locales. A este proceso se le denomina **análisis de la frontera**.

**Ejemplo 4.4** Determine y clasifique los extremos de la función  $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$  sobre la región  $R$ , donde  $R$  es la región triangular con vértices  $A(-1, -1)$ ,  $B(7, -1)$  y  $C(7, 7)$ .

**Solución:** Observe que  $\nabla f(x, y) = (2x - 4y, -4x + 3y^2 + 4)$ . Es fácil determinar que los puntos críticos de  $f$  son  $(4/3, 2/3)$  y  $(4, 2)$ . De acuerdo con la región triangular dada (ver figura 4.3), la cual es cerrada y acotada, ambos puntos están dentro de dicha región, por lo que se consideran los dos puntos<sup>2</sup>.

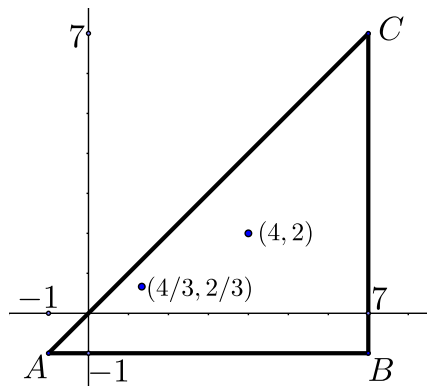


Figura 4.3: Región Triangular con vértices  $A, B$  y  $C$

<sup>2</sup>Si un punto crítico está fuera de la región dada entonces se descarta.



## 4.1. Máximos y mínimos locales

Usando la matriz Hessiana de  $f$  se llega a determinar que  $(4, 2)$  es un mínimo local y que  $(4/3, 2/3)$  es un punto de silla. Ahora, debe realizarse un análisis de la frontera, la cual está conformada por la unión de los tres segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ . Dicho estudio se hace a continuación.

- Segmento  $\overline{AB}$ : para este segmento observe que  $x \in [-1, 7]$  y  $y = -1$ , así se tiene que una parametrización puede ser  $r_1(t) = (t, -1)$ , con  $t \in [-1, 7]$ . Luego

$$f(r_1(t)) = f(t, -1) = t^2 + 4t - 5,$$

lo que determina una función escalar, la cual se define como  $g_1(t) = t^2 + 4t - 5$  para  $t \in [-1, 7]$ . Con herramientas de cálculo en una variable se determina que  $t = -2$  es un número crítico, sin embargo, está fuera del intervalo.

Luego, como  $g_1$  es creciente sobre el intervalo  $[-1, 7]$ , entonces  $t = -1$  es un mínimo local y  $t = 7$  es un máximo local. Bajo esta premisa, el punto  $(-1, -1)$  es un mínimo local de  $f(x, y)$  y  $(7, -1)$  es un máximo local de  $f(x, y)$ , ambos sobre la frontera de  $R$ .

- Segmento  $\overline{BC}$ : para este caso se tiene que  $x = 7$  y  $y \in [-1, 7]$ , por lo que una parametrización de este segmento es  $r_2(t) = (7, t)$ , con ello se cumple que

$$f(r_2(t)) = f(7, t) = t^3 - 24t + 49.$$

Defina la función escalar  $g_2(t) = t^3 - 24t + 49$  en  $t \in [-1, 7]$ , que con herramientas de cálculo en una variable se llega a que  $t = \pm 2\sqrt{2}$  son números críticos, pero el único que está en el intervalo es  $t = 2\sqrt{2}$ , el cual se determina que es un mínimo usando el criterio de la segunda derivada para funciones escalares. Así, el punto  $(7, 2\sqrt{2})$  sobre la frontera de  $R$  es un mínimo de  $f(x, y)$ .

Luego, al considerar los extremos del intervalo  $[-1, 7]$ , se determina que  $t = -1$  y  $t = 7$  son máximos para la función  $g_2$ , consecuentemente los puntos  $(7, -1)$  y  $(7, 7)$  son máximos de  $f(x, y)$ , ambos sobre la frontera de  $R$ .

- Segmento  $\overline{AC}$ : note que este segmento está sobre la recta identidad  $y = x$  con  $x \in [-1, 7]$ . Así se tiene que una parametrización de este segmento es  $r_3(t) = (t, t)$  con  $t \in [-1, 7]$ , entonces

$$f(r_3(t)) = f(t, t) = t^3 - 3t^2 + 4t,$$

de donde se define la función escalar  $g_3(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$  para  $t \in [-1, 7]$ , cuya primera derivada no tiene raíces, por tanto no hay números críticos. Esta función  $g_3$  es creciente en el intervalo  $[-1, 7]$ , entonces en  $t = -1$  existe un mínimo y en  $t = 7$  un máximo. Así, el punto  $(-1, -1)$  sobre la frontera de  $R$  es un mínimo de  $f(x, y)$  y el punto  $(7, 7)$  en la frontera de  $R$  es un máximo de  $f(x, y)$ .

La información obtenida se recopila en la siguiente tabla:

$(x, y)$	$f(x, y)$	Condición
$(4, 2)$	$f(4, 2) = 0$	Mínimo.
$(-1, -1)$	$f(-1, -1) = -8$	Mínimo.
$(7, -1)$	$f(7, -1) = 72$	Máximo.
$(7, 2\sqrt{2})$	$f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3,74$	Mínimo.
$(7, 7)$	$f(7, 7) = 224$	Máximo.

De la tabla anterior se deduce que el punto  $(7, 7)$  produce el máximo absoluto de la función  $f(x, y)$ , y que el mínimo absoluto se encuentra en el punto  $(-1, -1)$ .

**Ejemplo 4.5** Halle los extremos absolutos de  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y$  sobre la región plana dada por  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ .

**Solución:** Note que  $\nabla f(x, y) = (2x - 2y - 2, -2x + 2y + 2)$ . Al hacer  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  se obtiene únicamente que  $y = x - 1$ , es decir, hay infinitos puntos críticos que se ubican a lo largo de la recta  $y = x - 1$ . Dicha recta se grafica sobre la región  $R$  dada, la cual es una región en forma de cuadrado. El dibujo respectivo se muestra a en la figura 4.4.

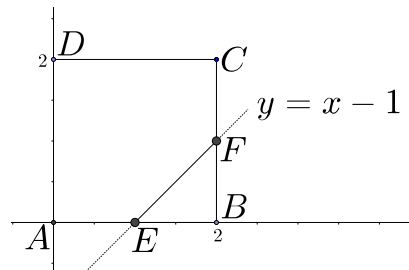


Figura 4.4: Región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

Aún no se puede decidir que tipo de extremo representan los puntos de la recta  $y = x - 1$  sobre la región  $R$  en la función  $f$ . Para indagar sobre ello, se realiza primero un análisis de la frontera de  $R$ , esto es:

- El segmento  $\overline{AB}$  se parametriza como  $r_1(t) = (t, 0)$  con  $t \in [0, 2]$ . Así:

$$f(r_1(t)) = f(t, 0) = t^2 - 2t.$$

Defina la función  $g_1(t) = t^2 - 2t$  para  $t \in [0, 2]$ , esta solo posee el punto crítico  $t = 1$ , el cual se determina que es un mínimo. Por la naturaleza gráfica de la función  $g_1$ , los extremos del intervalo son máximos. Consecuentemente, el punto  $(1, 0)$  es un mínimo de  $f(x, y)$  sobre la frontera de  $R$ , y los puntos  $(0, 0)$  y  $(2, 0)$  sobre la frontera de  $R$  son máximos de la función  $f(x, y)$ .

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

- Para el segmento  $\overline{BC}$ , este se parametriza como  $r_2(t) = (2, t)$  donde  $t \in [0, 2]$ , entonces:

$$f(r_2(t)) = f(2, t) = t^2 - 2t.$$

Note que es el mismo razonamiento del caso anterior, así el punto  $(2, 1)$  sobre la frontera de  $R$  es un mínimo de  $f(x, y)$ , y los puntos  $(2, 0)$  y  $(2, 2)$  sobre la frontera de  $R$  son máximos de la función  $f(x, y)$ .

- El segmento  $\overline{CD}$  se parametriza como  $r_3(t) = (t, 2)$  con  $t \in [0, 2]$ . Con ello se tiene que:

$$f(r_3(t)) = f(t, 2) = t^2 - 6t + 8.$$

Defina la función  $g_3(t) = t^2 - 6t + 8$  para  $t \in [0, 2]$ . El único punto crítico es  $t = 3$ , pero se ubica fuera del intervalo. Puesto que esta función es decreciente en  $[0, 2]$ , entonces en  $t = 0$  hay un máximo y en  $t = 2$  hay un mínimo. Con ello, el punto  $(0, 2)$  sobre  $R$  es un máximo de  $f(x, y)$  y, sin embargo,  $(2, 2)$  sobre  $R$  se considera un máximo de  $f(x, y)$  por el punto anterior.

- Para el segmento  $\overline{DA}$ , este se parametriza como  $r_4(t) = (0, t)$  donde  $t \in [0, 2]$ , luego:

$$f(r_4(t)) = f(0, t) = t^2 + 2t.$$

Al definir la función  $g_4(t) = t^2 + 2t$  con  $t \in [0, 2]$ , cuyo único punto crítico es  $t = -1$ , que está fuera del intervalo. En el intervalo de  $[0, 2]$  la función  $g_4$  es creciente, entonces en  $t = 0$  es un mínimo y en  $t = 2$  es un máximo. A pesar de ello, el punto  $(0, 0)$  sobre  $R$  es un máximo de  $f(x, y)$ , encontrado anteriormente, y el punto  $(0, 2)$  sobre  $R$  es un máximo de  $f(x, y)$ .

- Por último, el segmento  $\overline{EF}$ , sobre la recta  $y = x - 1$ , se puede parametrizar como  $r_5(t) = (t, t - 1)$  con  $t \in [1, 2]$ . Entonces:

$$f(r_5(t)) = f(t, t - 1) = t^2 - 2t(t - 1) + (t - 1)^2 - 2t + 2(t - 1) = -1.$$

Esto aún no aporta algo para inferir qué tipo de extremos son los puntos sobre el segmento  $\overline{EF}$ . Sin embargo, note que este segmento posee extremos al punto  $E(1, 0)$  y  $F(2, 1)$ , los cuales son mínimos de la función  $f(x, y)$  por todo el análisis hecho anteriormente. Con esto se infiere que los puntos sobre el segmento  $\overline{EF}$  producen valores mínimos para  $f(x, y)$ .

Un resumen de lo anterior se muestra en la tabla siguiente, de la cual se infiere que el punto  $(0, 2)$  produce el máximo absoluto de la función  $f(x, y)$ . Además, esta función no posee mínimo absoluto, todos son relativos.

$(x, y)$	$f(x, y)$	Condición
$(1, 0)$	$f(1, 0) = -1$	Mínimo.
$(0, 0)$	$f(0, 0) = 0$	Máximo.
$(2, 0)$	$f(2, 0) = 0$	Máximo.
$(2, 1)$	$f(2, 1) = -1$	Mínimo.
$(2, 2)$	$f(2, 2) = 0$	Máximo.
$(0, 2)$	$f(0, 2) = 8$	Máximo.
$(t, t - 1)$	$f(t, t - 1) = -1$	Mínimo.

**Ejemplo 4.6** Considere la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  sobre la región triangular  $R$  con vértices  $(-3, 0)$ ,  $(0, -3)$  y  $(0, 0)$ . Determine los valores que representa el máximo y mínimo absoluto de  $f$ .

**Solución:** En este caso  $\nabla f(x, y) = (2x - y + 1, 2y - x + 1)$ . El punto  $(-1, -1)$  es el único punto crítico de  $f$ , el cual se verifica de forma sencilla que está dentro de  $R$ , lo cual se muestra a continuación:

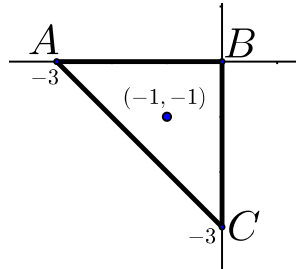


Figura 4.5: Región triangular  $R$

Además, usando el determinante de la matriz Hessiana de  $f$  se concluye que dicho punto crítico es un mínimo de dicha función. El estudio del comportamiento de  $f$  sobre la frontera de  $R$  se hace a continuación.

- El segmento de  $\overline{AB}$  se parametriza como  $r_1(t) = (t, 0)$  donde  $t \in [-3, 0]$ , así

$$f(r_1(t)) = f(t, 0) = t^2 + t,$$

con ello defina la función  $g_1(t) = t^2 + t$ , cuyo único número crítico es  $t = -\frac{1}{2}$ , el cual es un mínimo. Así, el punto  $(-\frac{1}{2}, 0)$  es un mínimo de la función  $f(x, y)$ . Asimismo note que los extremos del intervalo  $[-3, 0]$  son máximos de  $g_1$ , consecuentemente los puntos  $(-3, 0)$  y  $(0, 0)$  son máximos de  $f(x, y)$ .

- La parametrización del segmento  $\overline{BC}$  es  $r_2(t) = (0, t)$  con  $t \in [-3, 0]$ . Entonces:

$$f(r_2(t)) = f(0, t) = t^2 + t.$$

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

Defina  $g_2(t) = t^2 + t$ , donde  $t \in [-3, 0]$ . Análogamente al caso anterior, se determina que el punto  $(0, -\frac{1}{2})$  es un mínimo de  $f(x, y)$  y los puntos  $(0, -3)$  y  $(0, 0)$  son máximos de  $f(x, y)$ .

- El segmento  $\overline{CA}$  corresponde a un segmento sobre la recta  $y = -3 - x$ , entonces una posible parametrización es  $r_3(t) = (t, -3 - t)$ , donde  $t \in [-3, 0]$ . A partir de esto se tiene que

$$f(r_3(t)) = f(t, -3 - t) = t^2 + (-3 - t)^2 - t(-3 - t) - 3 - t = 3t^2 + 9t + 6.$$

Defina la función  $g_3(t) = 3t^2 + 9t + 6$  sobre el intervalo  $[-3, 0]$ . El único punto crítico es  $t = -\frac{3}{2}$ , el cual es un mínimo. Los extremos del intervalo son máximos de  $g_3$ . Así, el punto  $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$  es un mínimo de  $f(x, y)$  y los puntos  $(-3, 0)$  y  $(0, -3)$  son máximos de  $f(x, y)$ .

La tabla siguiente sintetiza la información obtenida

$(x, y)$	$f(x, y)$	Condición
$(-1, -1)$	$f(-1, -1) = -1$	Mínimo.
$(-\frac{1}{2}, 0)$	$f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$	Mínimo.
$(-3, 0)$	$f(-3, 0) = 6$	Máximo.
$(0, 0)$	$f(0, 0) = 0$	Máximo.
$(0, -\frac{1}{2})$	$f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$	Mínimo.
$(0, -3)$	$f(0, -3) = 6$	Máximo.
$(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$	Mínimo.

En relación con la tabla anterior, se determina que mínimo absoluto ocurre en el punto  $(-1, -1)$ . No existe un máximo absoluto, sin embargo, los puntos  $(-3, 0)$  y  $(0, -3)$  producen el valor máximo de la función  $f(x, y)$ .

**Ejemplo 4.7** Halle el máximo absoluto y el mínimo absoluto de  $f(x, y) = x^2 - x + y^2 - y + 1$  sobre la región circular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Solución:** El gradiente de  $f$  es  $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ . De aquí se deduce que el único punto crítico es  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , que está en el interior de  $R$ . También observe que

$$|H_f(x, y)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 > 0,$$

entonces el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  es un mínimo.

Ahora se debe analizar el comportamiento de la función  $f(x, y)$  sobre la frontera de  $R$ , la cual es claro que es un círculo de radio 1, cuya parametrización es  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Así,

$$f(r(t)) = f(\cos t, \sin t) = 2 - \cos t - \sin t.$$

Defina la función  $g(t) = 2 - \cos t - \sin t$  donde  $t \in [0, 2\pi]$ . Con ello,  $g'(t) = \sin t - \cos t$ , y se iguala a cero, como sigue.

$$\sin t - \cos t = 0 \Rightarrow \tan t = 1,$$

de donde se obtiene que los puntos críticos de  $g$  sobre  $[0, 2\pi]$  son  $t = \frac{\pi}{4}$  y  $t = \frac{5\pi}{4}$ . Usando el criterio de la segunda derivada para funciones reales de variable real se tiene que  $t = \frac{\pi}{4}$  es un mínimo y  $t = \frac{5\pi}{4}$  es un máximo. Por otro lado, el valor de  $t = \frac{\pi}{4}$  produce el punto  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , siendo un mínimo de  $f(x, y)$ , y  $t = \frac{5\pi}{4}$  aporta el punto  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , siendo un máximo de  $f(x, y)$ . Un resumen de la información obtenida se muestra a continuación:

$(x, y)$	$f(x, y)$	Condición
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$	Mínimo.
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}$	Mínimo.
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \sqrt{2}$	Máximo.

Así, el punto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  es un mínimo absoluto de  $f(x, y)$  y el punto  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  es un máximo absoluto de  $f(x, y)$ .

**Ejemplo 4.8** Calcule el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y que posea un vértice en el plano  $x + 2y + 3z = 6$ .

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

**Solución:** Al dibujar el plano  $x + 2y + 3z = 6$  en el primer octante, un dibujo que modele el problema se muestra en la figura 4.6.

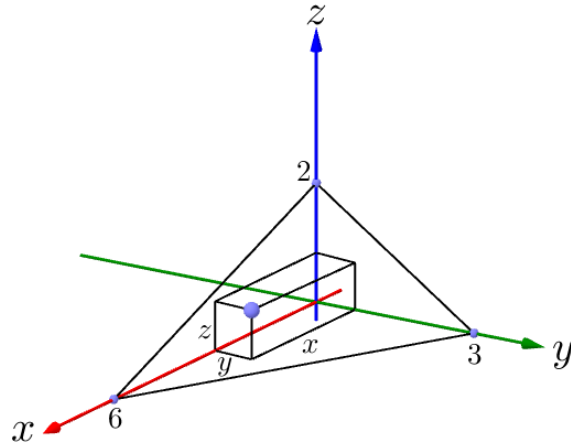


Figura 4.6: Caja rectangular en el primer octante

Defina el volumen de la caja rectangular descrita en la figura anterior como  $V = xyz$ . Del plano dado se obtiene que  $z = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x$ , por lo que se tendría que:

$$V(x, y) = xy \left( 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x \right) = 2xy - \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y.$$

Ahora se va a determinar los valores máximos de la función  $V(x, y)$ . Para este fin, note que  $\nabla V(x, y) = \left( 2y - \frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}xy, 2x - \frac{4}{3}xy - \frac{1}{3}x^2 \right)$ , que al igualarlo a cero se tiene que:

$$\begin{cases} 2y - \frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}xy = 0 \\ 2x - \frac{4}{3}xy - \frac{1}{3}x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{3}(3 - x - y) = 0 \\ \frac{x}{3}(6 - 4y - x) = 0 \end{cases}$$

Como se buscan longitudes solo interesa cuando  $x > 0$  y  $y > 0$ , entonces del sistema anterior solo queda

$$\begin{cases} 3 - x - y = 0 & (1) \\ 6 - 4y - x = 0 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) despeje  $y$ , luego proceda a sustituir esto en (2). Al final el punto crítico obtenido es  $(2, 1)$ . Para determinar que tipo de extremo es, se usa el Hessiano de  $V$ , esto es

$$H_V(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y & 2 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x \\ 2 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x & -\frac{4}{3}x \end{pmatrix},$$

entonces  $|H_V(2, 1)| = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} > 0$ , y dado que  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(2, 1) = -\frac{2}{3} < 0$ , entonces el punto  $(2, 1)$  es un máximo de la función  $V(x, y)$ . Por tanto, para que el volumen de la caja de la figura 4.6 sea máximo, las medidas deben ser  $x = 2$ ,  $y = 1$  y  $z = \frac{2}{3}$ , así

$$V = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ unidades cúbicas.}$$

**Ejemplo 4.9** Se desea construir una caja sin tapa con la forma de un paralelepípedo rectangular con volumen de  $V = 12m^3$ . El costo por  $m^2$  del material usado para el fondo cuesta \$4, el que se usará para dos de sus lados opuestos es \$3 y el que se usará para los otros dos lados opuestos es de \$2. Calcule las dimensiones de la caja para que el costo sea mínimo.

**Solución:** Un dibujo de la caja se aprecia en la figura 4.7 siguiente.

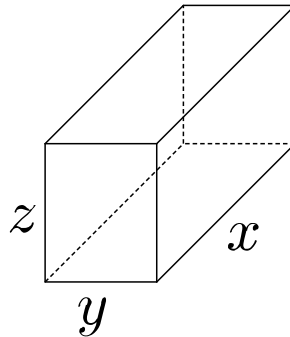


Figura 4.7: Caja paralelepípeda rectangular

De acuerdo con la información dada en el ejemplo, la función costo (se refiere al costo que tiene los materiales para construir la caja) se puede escribir como

$$C = 4xy + 3(2xz) + 2(2yz) = 4xy + 6xz + 4yz,$$

donde  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ . Luego, como el volumen de la caja es  $12m^3$ , entonces  $xyz = 12$ , es decir,  $z = \frac{12}{xy}$ , lo cual se sustituye en la función  $C$ , obteniendo

$$C(x, y) = 4xy + \frac{72}{y} + \frac{48}{x}.$$



#### 4.1. Máximos y mínimos locales

Observe que  $\nabla C(x, y) = \left(4y - \frac{48}{x^2}, 4x - \frac{72}{y^2}\right)$ , con esto, los puntos críticos se hallan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 4y - \frac{48}{x^2} = 0 \\ 4x - \frac{72}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 12 \\ xy^2 = 18 \end{cases},$$

aquí se determina que el punto crítico es  $(2, 3)$ . Con la matriz Hessiana de  $C$  fácilmente se deduce que dicho punto es un mínimo de la función costo. Con ello, las dimensiones de la caja para que el gasto sea mínimo debe ser  $x = 2m$ ,  $y = 3m$  y  $z = 2m$ .

#### 4.1.2. Prueba de la segunda derivada en $\mathbb{R}^n$

**Definición 4.3** (Matriz Hessiana para funciones reales de variable vectorial) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un función con todas sus derivadas parciales de segundo orden continuas y sea  $P \in \mathbb{R}^n$ . Se define la matriz Hessiana de  $f$  en  $P$  como

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}.$$

#### Observación 4.4 .

1. La matriz Hessiana anterior se suele denominar Hessiano de orden  $n$ .
2. Por comodidad de notación se puede escribir

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P) & f_{x_1 x_2}(P) & \cdots & f_{x_1 x_n}(P) \\ f_{x_2 x_1}(P) & f_{x_2 x_2}(P) & \cdots & f_{x_2 x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(P) & f_{x_n x_2}(P) & \cdots & f_{x_n x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

3. Dada la continuidad de las segundas derivadas parciales de  $f$ , se tiene que las derivadas cruzadas son iguales, esto es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$$

para  $P \in \mathbb{R}^n$ , consecuentemente se deduce que la matriz Hessiana de orden  $n$  es simétrica, es decir,  $H_f^T = H_f$ .

4. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y)$ , entonces

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

que ya fue definida con anterioridad.

5. Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z)$ , entonces

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

**Definición 4.4 (Menores principales)** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , la cual está dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

los menores principales de  $A$  están dados por determinantes

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = |A|.$$

**Definición 4.5 (Matriz definida positiva y matriz definida negativa)** Sea la matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , se dice que:

1.  $A$  es definida positiva si todos sus menores principales son positivos.
2.  $A$  es definida negativa si sus  $n$  menores principales alternan su signo y  $\Delta_1 < 0$ , es decir, se empieza con el signo negativo.
3. En cualquier otro caso  $A$  no es definida positiva ni definida negativa.

**Teorema 4.4** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y  $U$  un conjunto abierto, suponga además que  $P \in U$  es un punto crítico entonces,

1.  $P$  es un máximo local de  $f$  si  $H_f(P)$  es definida negativa.

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

2.  $P$  es un mínimo local de  $f$  si  $H_f(P)$  es definida positiva.
3.  $P$  es un punto de silla de  $f$  si  $H_f(P)$  no es definida negativa ni definida positiva y ninguno de sus menores principales son cero.

**Ejemplo 4.10** Sea  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ , determine todos sus extremos y clasifíquelos.

**Solución:** Note que  $\nabla f(x, y, z) = (2x - y + 1, 2y - x, 2z - 2)$ , para los puntos críticos se hace

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ x = 2y \\ z = 1 \end{cases}.$$

De este sistema se obtiene que  $x = -\frac{2}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}$  y  $z = 1$ . Así el punto crítico es  $P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ . Luego, observe que

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de  $H_f$  son:

- $\Delta_1 = |2| = 2 > 0$  (positivo).
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$  (positivo).
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$  (positivo).

Por tanto  $H_f$  es definida positiva, así  $P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$  es un mínimo de  $f$ .

**Ejemplo 4.11** Muestre que la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(x + y + z),$$

tiene un máximo local en el punto  $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Solución:** Primero se debe mostrar que  $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  es un punto crítico de la función  $f$ , es decir, se debe verificar que  $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 0)$ . En efecto:

$$\nabla f(x, y, z) = (\cos x - \cos(x + y + z), \cos y - \cos(x + y + z), \cos z - \cos(x + y + z)),$$

entonces se tiene que

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}\right) = (0, 0, 0).$$

Para mostrar que el punto  $P$  es un máximo se va usar el Hessiano de  $f$ , denotado por  $H_f(x, y, z)$ , el cual es:

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) \\ \operatorname{sen}(x + y + z) & -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) \\ \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) & -\operatorname{sen} z + \operatorname{sen}(x + y + z) \end{pmatrix},$$

con lo que se tendría que:

$$\begin{aligned} H_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuyos menores principales son los siguientes:

- $\Delta_1 = |-2| = -2 < 0$  (negativo).
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$  (positivo).
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$  (negativo).

De esta forma la matriz  $H_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  es definida negativa, y por tanto el punto  $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  es un máximo de  $f$ .

#### 4.1. Máximos y mínimos locales

**Ejemplo 4.12** Muestre que la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2,$$

tiene un punto de ensilladura en el origen.

**Solución:** Similarmente al ejemplo anterior, se debe verificar primero que  $P(0, 0, 0)$  es un punto crítico de la función  $f$ , es decir, se debe comprobar que  $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ , esto es:

$$\nabla f(x, y, z) = (-2xe^{-x^2}, -2ye^{-y^2}, 2z)$$

entonces se cumple que

$$\nabla f(0, 0, 0) = (-2 \cdot 0 \cdot e^{-0^2}, -2 \cdot 0 \cdot e^{-0^2}, 2 \cdot 0) = (0, 0, 0).$$

Ahora que se demostró que efectivamente  $P(0, 0, 0)$  es un punto crítico de  $f$ , para determinar que es un punto de silla se utiliza el Hessiano de  $f$ , donde:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (4x^2 - 2)e^{-x^2} & 0 & 0 \\ 0 & (4y^2 - 2)e^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así, dicho Hessiano de  $f$  en el punto  $P(0, 0, 0)$  es:

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyos menores principales son los siguientes:

- $\Delta_1 = |-2| = -2 < 0$  (negativo).
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$  (positivo).
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$  (positivo).

Como todos los menores principales son diferentes de cero y  $H_f(0, 0, 0)$  no es definida positiva ni negativa, entonces se concluye que el punto  $P(0, 0, 0)$  es un punto de ensilladura.

**Observación 4.5** Existen ejercicios que al resolverlos por medio de las estrategias estudiadas anteriormente no es lo más adecuado para determinar su solución. Por ejemplo, considere el siguiente problema:

“Se desea calcular el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados, que puede inscribirse en el elipsoide  $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ ”.

Si el problema se limita al primer octante, un dibujo que represente el problema es el mostrado en la figura 4.8. Observe que el volumen es  $V = 8xyz$  (son 8 octantes),  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ . Al despejar  $z$  de la elipse se tiene que  $z = \frac{1}{3}\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}$ . Con ello, se define la función

$$V(x, y) = \frac{8xy}{3}\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2},$$

de la cual es evidente que hallar sus puntos críticos conlleva cierta complejidad. Incluso, existen ocasiones donde es imposible despejar una variable en términos de las otras para obtener una función de dos variables. En el apartado siguiente de este texto se presenta teoría que permite hallar la solución de este problema mediante un proceso alternativo llamado Multiplicadores de Lagrange.

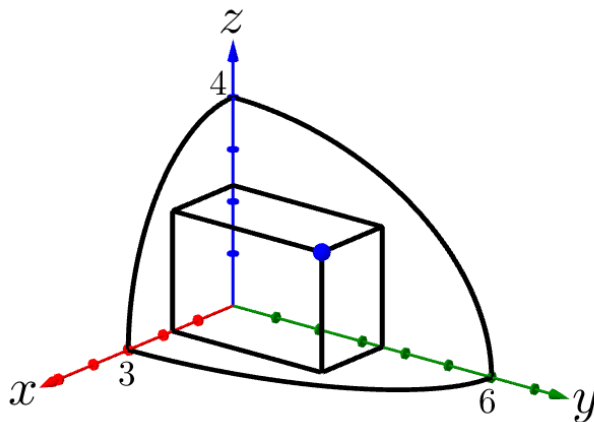


Figura 4.8: Paralelepípedo rectangular dentro del elipsoide  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$  en el primer octante

## Ejercicios

**Ejercicio 106** Halle y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + y^2 - 7x - y + 6$ .

**Ejercicio 107** Determine y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 3y$ .

**Ejercicio 108** Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$ .

**Ejercicio 109** Halle y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^2 + 2y^4 - 2xy$ .

**Ejercicio 110** Halle y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x - y^2 - \ln(x + y)$ .

**Ejercicio 111** Encuentre los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ . Luego clasifique el punto  $P(-1, -1)$ .

**Ejercicio 112** Determine los puntos críticos de la función  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$  y clasifique el punto crítico  $P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Ejercicio 113** Determine y clasifique los puntos críticos de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(4y^2 + 1)}.$$

**Sugerencia:** por simplicidad puede usar el hecho que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3(4y^2 + 1)^3} \cdot 2(1 - 12y^2).$$

**Ejercicio 114** Halle y clasifique los puntos críticos de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = y^3 + (x + y)^2 + 6(x - y)$ .

**Ejercicio 115** Determine y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x \ln y + x$ .

**Ejercicio 116** Sea la función  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 12xy$ . Muestre que el punto  $P(-4, -4)$  es un máximo local de  $f$ .

**Ejercicio 117** Muestre que la función  $f(x, y) = 2x - 3y + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 5 \arctan \frac{y}{x}$  posee un punto de silla en el punto  $P(1, 1)$ .

**Ejercicio 118** Determine y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$ .  
**Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 4.3.

**Ejercicio 119** Determine las dimensiones de una caja rectangular sin tapa, cuyo volumen es de  $100 \text{ cm}^3$ , para que tenga la menor superficie posible.

**Ejercicio 120** Considere el plano  $x + y + z = 3$  y el punto fuera del plano  $Q(2, 3, 1)$ . Calcule la distancia más corta entre el punto  $Q$  y el plano dado. **Sugerencia:** sea  $(x, y, z)$  un punto del plano, así la distancia del punto  $Q$  al plano es  $d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$ , donde  $z = 3 - x - y$ .

**Ejercicio 121** Sea  $f(x, y) = \frac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}$ . Determine los extremos de  $f$  sobre el cuadrado  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Ejercicio 122** Determine los extremos de  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$  sobre la región plana  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Ejercicio 123** Encuentre los extremos de  $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$  sobre la región plana circular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Ejercicio 124** Determine y clasifique los extremos de la función  $f(x, y, z) = x^3z + y^3 - 3x^2y - 2z^2$ .

**Ejercicio 125** Halle y clasifique los extremos de la función  $f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} - x - y^2 + 2y - z^2 + 2z + 2$ .

**Ejercicio 126** Encuentre y clasifique los extremos de la función  $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z + 2$ .

**Ejercicio 127** Considere la función  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ .

1. Determine los puntos críticos de  $f$ . **Sugerencia:** en total son cinco.
2. Clasifique el punto  $(1, 1, 1)$ .

**Ejercicio 128** Considere la función  $f(x, y, z) = 5z^4 - 4xz^2 - 10yz^2 + 2x^2 + 7y^2 + 4z^2 + 4xy - 4x - 8y$ .



#### 4.1. Máximos y mínimos locales

1. Determine los puntos críticos de  $f$ .
2. Clasifique el punto  $(1, 1, -1)$ .

**Ejercicio 129** Muestre que la función  $f(x, y, z) = -2x^4 + x^2y^2 - 4y^4 - x^2z - y^2z + 4y^2 - z^2 - 4z$  tiene un máximo local en el punto  $P(-1, 1, 3)$ .

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

**Definición 4.6 (Función Lagrangiana)** Sean  $f, g_1, g_2, \dots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $m < n$ ) funciones con todas sus derivadas parciales de primer orden continuas y  $U$  un conjunto abierto, sea  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ , tal que los vectores  $\nabla g_i(x_1, \dots, x_n)$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  son linealmente independientes<sup>3</sup>. Suponga que se desea determinar los extremos de  $f(x_1, \dots, x_n)$  donde las variables  $(x_1, \dots, x_n)$  están sujetas a  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Se define la función Lagrangiana como

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

donde los  $\lambda_i$  son constantes para cada  $i = 1, \dots, m$ .

**Observación 4.6** Para la definición anterior se tiene lo siguiente:

1. La función Lagrangiana posee  $n + m$  variables.
2. Los números  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  se llaman multiplicadores de Lagrange.
3. Las funciones  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$  también se llaman ligaduras o restricciones. La función  $f$  se suele llamar función objetivo.

**Teorema 4.5** Sean  $f, g_1, g_2, \dots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $m < n$ ) funciones con todas sus derivadas parciales de primer orden continuas y  $U$  un conjunto abierto. Si  $f$  está sujeto a  $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$  y  $f$  posee un máximo o mínimo en el punto  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  bajo dichas restricciones, si  $\nabla g_i(x_1, \dots, x_n) \neq \vec{0}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ , entonces existen  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tales que

$$\nabla L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \vec{0}.$$

**Observación 4.7** Algunos casos particulares del teorema anterior son:

1. Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones con primeras derivadas parciales continuas y  $U$  un conjunto abierto. Si  $f$  está ligado a  $g = 0$  y  $f$  posee un extremo en el punto  $(x, y)$  bajo dicha restricción, si  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0).$$

---

<sup>3</sup>Esto equivale a decir que  $\nabla g_i(x_1, \dots, x_m) \neq \vec{0}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

En este caso la función Lagrangiana está dada por  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ , por tanto al hacer  $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ , el sistema que se forma es

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases},$$

del cual se debe obtener los valores de  $x$  e  $y$  que para algún  $\lambda$  satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

2. Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones con primeras derivadas parciales continuas y  $U$  un conjunto abierto. Si  $f$  está ligado a  $g = 0$  y  $f$  posee un extremo en el punto  $(x, y, z)$  bajo dicha restricción, si  $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0).$$

En este caso la función Lagrangiana está dada por  $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ , por tanto al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ , el sistema que se forma es

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

del cual se debe obtener los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  que para algún  $\lambda$  satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

3. Sean  $f, g_1, g_2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tres funciones con primeras derivadas parciales continuas y  $U$  un conjunto abierto. Si  $f$  está ligado a  $g_1 = 0$  y  $g_2 = 0$  y  $f$  posee un extremo en el punto  $(x, y, z)$  bajo dichas restricciones, si  $\nabla g_1(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  y  $\nabla g_2(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , entonces existen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

La función Lagrangiana está dada por  $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$ , por tanto al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , el sistema que se forma es

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

del cual se debe obtener los valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  que para algunos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

**Ejemplo 4.13** Calcule los valores extremos de  $f(x, y) = xy$  sujeto a  $4x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución:** Defina  $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ . De esta manera la función Lagrangiana es

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 4).$$

El teorema 4.5 garantiza la existencia de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ , de donde se forma el sistema

$$\begin{cases} y + 8x\lambda = 0 & (1) \\ x + 2y\lambda = 0 & (2) \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases} .$$

Para darle solución a este sistema existen varias formas, una de ellas es despejar de la ecuación (1)  $y = -8x\lambda$ , y se sustituye en la ecuación (2), como sigue:

$$\begin{aligned} x + 2\lambda(-8x\lambda) = 0 &\Rightarrow x - 16x\lambda^2 = 0 \\ &\Rightarrow x(1 - 4\lambda)(1 + 4\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ o } \lambda = \pm\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Posteriormente se analizan estos casos obtenidos de tal manera que todas las ecuaciones del sistema se cumplan, esto es:

- Si  $x = 0$ , en (1) se tiene que  $y = 0$ , pero en la ecuación (3) se obtiene que  $-4 = 0$ , lo cual es falso. Así que este caso queda descartado.
- Si  $\lambda = \pm\frac{1}{4}$ , este resultado se cambia en (1) y se obtiene que  $y = \mp 2x$ , lo cual se sustituye en (3) como sigue:

$$\begin{aligned} 4x^2 + (\mp 2x)^2 - 4 = 0 &\Rightarrow 4x^2 + 4x^2 = 4 \\ &\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Con ello se deduce que  $y = \pm\sqrt{2}$ . Así los extremos de  $f$  ligados a la función  $g = 0$  son  $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ ,  $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ ,  $P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$  y  $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ . Dado que  $f(x, y) = xy$ , es claro que  $f(P_1) = f(P_4) = 1$  y  $f(P_2) = f(P_3) = -1$ , así  $f$  alcanza su valor máximo en los puntos  $P_1$  y  $P_4$  y alcanza su valor mínimo en los puntos  $P_2$  y  $P_3$ .

**Ejemplo 4.14** Muestre que para cualquiera números reales  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  se cumple que  $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ . Sugerencia: realmente se pregunta por el valor máximo de  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$  restringido a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , con  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

**Solución:** Sea  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Así, la función Lagrangiana es

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + yz + xz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Luego, el teorema 4.5 garantiza la existencia de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ , de donde obtiene el sistema

$$\begin{cases} y + z + 2x\lambda = 0 & (1) \\ x + z + 2y\lambda = 0 & (2) \\ x + y + 2z\lambda = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

Sume las ecuaciones (1), (2) y (3), esto es:

$$\begin{aligned} y + z + 2x\lambda + x + z + 2y\lambda + x + y + 2z\lambda = 0 &\Rightarrow 2x + 2y + 2z + 2x\lambda + 2y\lambda + 2z\lambda = 0 \\ &\Rightarrow (x + y + z) + \lambda(x + y + z) = 0 \\ &\Rightarrow (x + y + z)(\lambda + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x + y + z = 0 \text{ o } \lambda = -1. \end{aligned}$$

Los dos casos obtenidos se analizan a continuación.

- El caso  $x + y + z = 0$ , aunque puede producir puntos extremos de  $f$ , se descarta, estos pues no existen números positivos  $x$ ,  $y$  y  $z$  tal que  $x + y + z = 0$ . Ahora, si los tres números  $x$ ,  $y$  y  $z$  valen cero simultáneamente se contradice la ecuación (4).
- Si  $\lambda = -1$ , de las ecuaciones (1), (2) y (3) se forma el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases},$$

de donde se obtiene la matriz

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A partir de la matriz anterior es claro que  $y = z$  y  $x = z$ . Estos dos resultados se cambian en la ecuación (4):

$$z^2 + z^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Luego, de aquí se obtiene que  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , por lo que se obtienen nueve puntos diferentes por todas las posibles permutas. Sin embargo, como  $z \geq 0$ , entonces tome  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , por tanto  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Por la naturaleza<sup>4</sup> de la función  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ , es claro que el máximo valor ocurre en el punto  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  y dicho valor es  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ .

**Ejemplo 4.15** Calcule el volumen máximo del paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados que se pueden inscribir en el elipsoide  $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ .

**Solución:** Note que realmente corresponde al ejemplo presentado en la observación 4.5. A partir de ello, se va determinar el máximo de  $V(x, y, z) = 8xyz$  restringido a  $g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144$ . La función Lagrangiana viene dada por:

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144).$$

El teorema 4.5 garantiza la existencia de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ , de aquí se genera el sistema

$$\begin{cases} 8yz + 32x\lambda = 0 & (1) \\ 8xz + 8y\lambda = 0 & (2) \\ 8xy + 18z\lambda = 0 & (3) \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 & (4) \end{cases}.$$

Multiplique las ecuaciones (1), (2) y (3) por  $x$ ,  $y$  y  $z$  de forma respectiva, obteniendo

$$\begin{cases} 8xyz + 32x^2\lambda = 0 & (5) \\ 8xyz + 8y^2\lambda = 0 & (6) \\ 8xyz + 18z^2\lambda = 0 & (7) \end{cases}.$$

Proceda ahora a sumar las igualdades (5), (6) y (7), esto es:

$$\begin{aligned} 8xyz + 32x^2\lambda + 8xyz + 8y^2\lambda + 8xyz + 18z^2\lambda = 0 & \Rightarrow 24xyz + 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2) = 0 \\ & \Rightarrow 24xyz + 2\lambda \cdot 144 = 0 \text{ por (4).} \\ & \Rightarrow 24xyz = -288\lambda \\ & \Rightarrow xyz = -12\lambda. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Observe que el criterio es la suma de productos dos a dos, y como  $z \geq 0$ , entonces el valor máximo de  $f$  ocurre cuando cada elemento del punto es positivo.

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

Este último resultado sustitúyalo en la ecuación (5) como sigue:

$$\begin{aligned}8 \cdot (-12\lambda) + 32x^2\lambda = 0 &\Rightarrow -96\lambda + 32x^2\lambda = 0 \\ &\Rightarrow 32\lambda(-3 + x^2) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } x = \pm\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Estos dos casos se estudian a continuación:

- Si  $\lambda = 0$  conlleva a que  $xyz = 0$ , lo cual se descarta pues  $x$ ,  $y$  y  $z$  corresponde a medidas de un paralelepípedo recto, es decir,  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ .
- Si  $x = \pm\sqrt{3}$ , solo se considera el positivo pues  $x > 0$ . Así, la única posibilidad es que  $x = \sqrt{3}$ .

De forma análoga, sustituyendo  $xyz = -12\lambda$  en las ecuaciones (6) y (7) se deduce que  $y = 2\sqrt{3}$  y  $z = \frac{4}{3}\sqrt{3}$  respectivamente. Con esta información, el punto que da el volumen máximo es  $P\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ , siendo el valor de este volumen el siguiente:

$$V\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \text{ unidades cúbicas.}$$

**Ejemplo 4.16** Sea  $\mathcal{C}$  la parte en el primer octante del arco de la curva que es la intersección del paraboloide  $2z = 16 - x^2 - y^2$  con el plano  $x + y = 4$ . Encuentre los puntos de  $\mathcal{C}$  más cercanos al origen y los más lejanos. Calcule la distancia mínima y máxima de  $\mathcal{C}$  al origen.

**Solución:** Sea  $P(x, y, z)$  un punto arbitrario de la curva  $\mathcal{C}$  y sea  $\vec{0}_3 = (0, 0, 0)$ , entonces la distancia de  $P$  al origen está dado por

$$d(P, \vec{0}_3) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Entonces se necesita los valores de  $P(x, y, z)$  que hagan que dicha distancia sea mínima y máxima. Para ello, considere solo el subradical de la distancia  $d(P, \vec{0}_3)$  y defina la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeta a las restricciones  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$  y  $g_2(x, y, z) = x + y - 4 = 0$ . Con ello, considere la función Lagrangiana dada por:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \lambda_2(x + y - 4).$$

Haciendo  $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0)$  se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ 2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ 2z + 2\lambda_1 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 & (4) \\ x + y - 4 = 0 & (5) \end{cases} .$$

Al restar la igualdad (1) con la igualdad (2) se tiene que

$$\begin{aligned} 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 - (2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2) &= 0 \Rightarrow 2(x - y) + 2\lambda_1(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow 2(1 + \lambda_1)(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ ó } x = y. \end{aligned}$$

En seguida se analizan estos dos casos.

- Si  $\lambda_1 = -1$ , en la igualdad (3) se tiene que  $2z - 2 = 0$ , entonces  $z = 1$ . Con este resultado, la ecuación (4) queda  $x^2 + y^2 - 14 = 0$ . Abonado a ello, de la igualdad (5) se deduce que  $y = 4 - x$ , por tanto se obtiene que

$$\begin{aligned} x^2 + (4 - x)^2 - 14 = 0 &\Rightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Si  $x = 2 + \sqrt{3}$  entonces  $y = 4 - (2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ , obteniendo el punto  $P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)$ . De forma análoga, si  $x = 2 - \sqrt{3}$  se obtiene el punto  $P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$ .

- Si  $x = y$ , en la igualdad (5) se tiene que  $x + x - 4 = 0$ , es decir,  $x = 2$ , y por tanto  $y = 2$ . Este resultado se cambia en (4), como sigue:

$$(2)^2 + (2)^2 + 2z - 16 = 0 \Rightarrow z = 4.$$

Además, también se determina que  $\lambda_1 = -4$ , entonces el punto obtenido es  $P_3(2, 2, 4)$ .

Para decidir cuál punto de  $\mathcal{C}$  está más cercano al origen y cuál está más lejos del origen, se procede a hallar las distancias del origen a los puntos averiguados, estos es:

- $d(P_1, \vec{0}_3) = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{15} \approx 3,87$ .
- $d(P_2, \vec{0}_3) = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{15} \approx 3,87$ .
- $d(P_3, \vec{0}_3) = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{6} \approx 4,89$ .



## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

Con lo anterior se deduce que el punto de  $C$  más lejano del origen es  $P_3(2, 2, 4)$  y los más cercanos son  $P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)$  y  $P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$ .

**Observación 4.8** De los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  del ejemplo anterior no se tienen criterios suficientes para decidir si son máximos o mínimos (o ninguno) de la función  $f$ . Para ello se necesita teoría que se estudia más adelante.

**Ejemplo 4.17** Considere la curva elíptica formada de la intersección del plano  $x + y + z = 1$  con el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Determine los puntos sobre dicha elipse que se encuentran más lejanos y más cercanos del origen.

**Solución:** Use el ejemplo 4.16 anterior como referencia. Sea  $P(x, y, z)$  un punto de la curva elíptica y sea  $\vec{0}_3 = (0, 0, 0)$ . Entonces la distancia de  $P$  al origen es  $d(P, \vec{0}_3) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Así, defina  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  restringido a las funciones  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$  y  $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$ . Al montar la función Lagrangiana y usando el teorema 4.5 se concluye que los puntos extremos de  $f$  son  $P_1(1, 0, 0)$ ,  $P_2(0, 1, 0)$ ,  $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$  y  $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ .

Si se calcula las respectivas distancias, se determina que los puntos de la elipse más cercanos al origen son  $P_1$  y  $P_2$ , y el más lejano es  $P_4$ .

**Ejemplo 4.18** Determine los extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sujeto a  $x + y + z = 3$  y  $z = 1$ .

**Solución:** En este caso la función  $f$  está restringida a  $g_1(x, y, z) = x + y + z - 3$  y  $g_2(x, y, z) = z - 1$ . La función Lagrangiana está dada por

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(z - 1).$$

Luego, haciendo  $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0)$  se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 = 0 & (1) \\ 2y + \lambda_1 = 0 & (2) \\ 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ x + y + z - 3 = 0 & (4) \\ z - 1 = 0 & (5) \end{cases} .$$

De la ecuación (1) y (2) se deduce que  $x = y$ . De la ecuación (5) es claro que  $z = 1$ . Estos dos resultados se cambian en la ecuación (4), esto es

$$x + x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Luego se tiene que  $y = 1$  pues  $x = y$ . Con estos resultados, los valores de los multiplicadores de Lagrange son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 0$ . Así, el único extremo de la función  $f$  bajo las ligaduras dadas es  $P(1, 1, 1)$ . Aún no se puede decidir si es máximo o mínimo, para ello se necesita la teoría dada a continuación.

**Observación 4.9** En el ejemplo 4.18, la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  es el cuadrado de la distancia del punto  $(x, y, z)$  al origen, entonces realmente se está preguntando por el punto donde ocurre la mínima distancia entre el origen a la recta formada por la intersección de los planos  $x + y + z = 3$  y  $z = 1$ .

### 4.2.1. Clasificación de extremos con ligaduras

Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U$  abierto, la cual está sujeta a  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ , donde  $m < n$ . Sea

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

la función Lagrangiana. Se define el Hessiano Orlado como la matriz

$$\tilde{H} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{array} \right).$$

Además, los menores principales orlados están dados por

$$\Delta_i = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} \end{array} \right| \text{ para } i = m + 1, \dots, n.$$

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

Sea  $P \in \mathbb{R}^n$  un extremo de  $f$  sujeto a  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ , entonces se tiene que:

1. Si  $(-1)^m \Delta_i(P) > 0$  para todo  $i = m + 1, \dots, n$ , entonces  $P$  es un mínimo de  $f(x_1, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ , es decir,  $P$  es mínimo si todos los menores principales orlados son del mismo signo que  $(-1)^m$ .
2. Si  $(-1)^i \Delta_i(P) > 0$  para todo  $i = m + 1, \dots, n$ , entonces  $P$  es un máximo de  $f(x_1, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ , es decir,  $P$  es un máximo si todos los menores principales orlados son de signo alternado del mismo signo que  $(-1)^i$ .

**Observación 4.10** Algunos casos particulares de la teoría anterior son:

1. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sujeto a la ligadura  $g(x, y) = 0$  ( $n = 2$  y  $m = 1$ ). La función Lagrangiana es  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  y el Hessiano Orlado es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Observe que para los menores principales orlados se tiene que  $i = m + 1, \dots, n$ , entonces  $i = 1 + 1, \dots, 2$ , es decir,  $i = 2$ . Así existe un único menor principal orlado, que es precisamente el mismo Hessiano Orlado. Luego, si  $P$  es un extremo de  $f$  bajo la ligadura dada, entonces:

- Si  $|\tilde{H}(P)| < 0$ , entonces  $P$  es un mínimo.
  - Si  $|\tilde{H}(P)| > 0$ , entonces  $P$  es un máximo.
  - Si  $|\tilde{H}(P)| = 0$  el criterio no decide.
2. Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sujeto a la ligadura  $g(x, y, z) = 0$  ( $n = 3$  y  $m = 1$ ). La función Lagrangiana es  $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$  y el Hessiano Orlado es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Para los menores principales orlados se tiene que  $i = m + 1, \dots, n$ , entonces  $i = 1 + 1, \dots, 3$ , es decir,  $i = 2, 3$ . Así existen dos menores principales orlados, los cuales son

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_3 = |\tilde{H}|.$$

Ahora, si el punto  $P$  es un extremo de  $f$  bajo la ligadura dada, entonces:

- Si  $\Delta_2(P) < 0$  y  $\Delta_3(P) < 0$ , entonces  $P$  es un mínimo.
  - Si  $\Delta_2(P) > 0$  y  $\Delta_3(P) < 0$ , entonces  $P$  es un máximo.
  - En cualquier otro caso el criterio no decide.
3. Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sujeto a las ligaduras  $g_1(x, y, z) = 0$  y  $g_2(x, y, z) = 0$  ( $n = 3$  y  $m = 2$ ). La función Lagrangiana es  $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$  y el Hessiano Orlado es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Para los menores principales orlados es claro que  $i = m + 1, \dots, n$ , entonces  $i = 2 + 1, \dots, 3$ , es decir,  $i = 3$ . Con ello solo existe un único menor principal, siendo este el mismo Hessiano Orlado. Luego, si el punto  $P$  es un extremo de  $f$  bajo las dos ligaduras dadas, entonces:

- Si  $|\tilde{H}(P)| > 0$ , entonces  $P$  es un mínimo.
- Si  $|\tilde{H}(P)| < 0$ , entonces  $P$  es un máximo.
- Si  $|\tilde{H}(P)| = 0$  el criterio no decide.

**Ejemplo 4.19** Aplique el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}xy$ , sujeto a  $4x^2 + y^2 = 1$ . Clasifique el punto dado por  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

**Solución:** Defina la función Lagrangiana como  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$ .

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

Al hacer  $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$  se genera el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y + 8x\lambda = 0 & (1) \\ 2y + \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 2y\lambda = 0 & (2) \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases} .$$

De las igualdades (1) y (2) se forma el sistema homogéneo dado por

$$\begin{cases} (2 + 8\lambda)x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x + (2 + 2\lambda)y = 0 \end{cases} .$$

Por la ecuación (3) se deduce que la solución no puede ser trivial<sup>5</sup>, esto a su vez implica que la matriz asociada a dicho sistema debe tener el determinante igual a cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} 2 + 8\lambda & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & 2 + 2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

De aquí se obtiene que  $64\lambda^2 + 80\lambda - 11 = 0$ , lo cual equivale a  $(8\lambda + 11)(8\lambda - 1) = 0$ . Los dos casos obtenidos son cuando  $\lambda = -\frac{11}{8}$  y  $\lambda = \frac{1}{8}$ , los cuales se estudian a continuación.

- Si  $\lambda = \frac{1}{8}$ , el último sistema de ecuaciones se reduce a

$$\begin{cases} 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{4}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{3}y = 0 \\ 2\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + \sqrt{3}y = 0.$$

De aquí se deduce que  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y$ , lo cual se cambia en la igualdad (3), esto es:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + y^2 &= 1 \Rightarrow 3y^2 + y^2 = 1 \\ &\Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego, si  $y = \pm\frac{1}{2}$ , entonces  $x = \mp\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Con esto, los puntos críticos son  $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$  y

$$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

---

<sup>5</sup>Esto quiere decir que las variables  $x$  e  $y$  no pueden valer cero simultáneamente.

- Si  $\lambda = -\frac{11}{8}$ , se procede de forma análoga al caso anterior, donde se obtiene que  $x = \frac{\sqrt{3}}{6}y$ , se cambia en (3) y se determinan los puntos extremos ligados  $P_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  y  $P_4\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Por otro lado, solo se solicita clasificar el punto  $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , para cual se halla el Hessiano Orlado en el caso  $n = 2$  y  $m = 1$ , esto es:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & 2 + 8\lambda & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2y & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Así, y teniendo presente que  $\lambda = \frac{1}{8}$ , resulta que

$$\tilde{H}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 1 \\ -2\sqrt{3} & 3 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Luego, el único menor principal es la mismo Hessiano Orlado, donde se obtiene que  $\left|\tilde{H}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)\right| = -48 < 0$ , entonces el punto  $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$  es un mínimo ligado. Se invita al lector clasificar los demás puntos.

**Ejemplo 4.20** Estudie los extremos<sup>6</sup> de  $f(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4}$ , sujeto a  $x + y + z = 1$ .

**Solución:** La función Lagrangiana es  $L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + \lambda(x + y + z - 1)$ . Haciendo  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$  se forma el sistema

$$\begin{cases} x^3 + \lambda = 0 & (1) \\ y^3 + \lambda = 0 & (2) \\ z^3 + \lambda = 0 & (3) \\ x + y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

<sup>6</sup>Estudiar los extremos de una función se refiere a encontrarlos y clasificarlos.

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

De las igualdades (1), (2) y (3) se concluye que  $-\lambda = x^3 = y^3 = z^3$ , es decir,  $-\sqrt[3]{\lambda} = x = y = z$ . De estos resultados, y usando la igualdad (4) se determina que  $x = y = z = \frac{1}{3}$  y  $\lambda = \frac{-1}{27}$ . Así, el punto  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  es un extremo de  $f$  bajo la ligadura dada. Para clasificarlo se usa el Hessiano Orlano cuando  $n = 3$  y  $m = 1$ , esto es:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3y^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

Luego  $\tilde{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ , con esto, los menores principales orlados son

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right| = -\frac{1}{3} < 0.$$

Como ambos menores principales orlados son negativos, entonces el punto  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  es un mínimo de  $f$  bajo la ligadura dada.

**Ejemplo 4.21** Aplique multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeto a  $x^2 - xy + y^2 - 2y - 2x + 4 = 1$ . Clasifique el punto  $(1, 1, 0)$ .

**Solución:** Defina la ligadura como  $g(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 2y - 2x + 3 = 0$ , así la función Lagrangiana es  $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 2y - 2x + 3)$ . Al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$  se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x - y - 2) = 0 & (1) \\ 2y + \lambda(2y - x - 2) = 0 & (2) \\ 2z = 0 & (3) \\ x^2 - xy + y^2 - 2y - 2x + 3 = 0 & (4) \end{cases}.$$

Observe que  $z = 0$  por (3). Por otro lado, si se restan las igualdades (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 2x - 2y + \lambda(2x - y - 2) - \lambda(2y - x - 2) = 0 &\Rightarrow 2(x - y) + 3\lambda(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow (x - y)(3\lambda + 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = y \text{ ó } \lambda = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Estos dos casos se analizan a continuación:

- Si  $x = y$ , se sustituye en la ecuación (4) y se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - x^2 + x^2 - 2x - 2x + 3 = 0 &\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = 3. \end{aligned}$$

Con ello, si  $x = 1$  entonces  $y = 1$  y  $\lambda = 2$ , así se determinan el punto extremo ligado  $P_1(1, 1, 0)$ . De forma similar, si  $x = 3$  entonces  $y = 3$  y  $\lambda = -6$ , obteniendo el punto extremo ligado  $P_2(3, 3, 0)$ .

- Si  $\lambda = -\frac{2}{3}$ , esto se cambia en las igualdades (1) y (2) de forma simultánea y en ambos casos se genera la ecuación  $x + y + 2 = 0$ , de donde resulta que  $y = -x - 2$ . Este último resultado se sustituye en (4), generando lo siguiente:

$$x^2 - x(-x - 2) + (-x - 2)^2 - 2x - 2(-x - 2) + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 11 = 0.$$

La última ecuación nunca se anula en  $\mathbb{R}$  dado que su discriminante es menor que cero<sup>7</sup>. Así este caso no aporta extremos ligados de la función  $f$ .

Para clasificar el extremo ligado  $P_1(1, 1, 0)$  se usa el Hessiano Orlado para  $n = 3$  y  $m = 1$ , el cual viene dado por

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x - y - 2 & 2y - x - 2 & 0 \\ 2x - y - 2 & 2 + 2\lambda & -\lambda & 0 \\ 2y - x - 2 & -\lambda & 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

---

<sup>7</sup>El discriminante de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  es  $\Delta = b^2 - 4ac$ .



## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

donde  $\lambda = 2$ . A partir de ello se tiene que:

$$\tilde{H}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales orlados están dados por:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H}(1, 1, 0) \right| = -32 < 0.$$

Entonces el punto  $P_1(1, 1, 0)$  es un mínimo ligado.

**Observación 4.11** Como  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  es el cuadrado de la distancia de un punto  $(x, y, z)$  al origen, entonces en el ejemplo 4.21 equivale a preguntar por los puntos donde ocurren la menor y mayor distancia de la superficie  $x^2 - xy + y^2 - 2y - 2x + 4 = 1$  al origen.

**Ejemplo 4.22** Aplique el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ , sujeto a  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Además, si es posible, clasifique los puntos obtenidos.

**Solución:** La función Lagrangiana viene dada por  $L(x, y, z, \lambda) = xy + xz + yz + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1)$ .

Al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, )$  se origina el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y + z + 2x\lambda = 0 & (1) \\ x + z + 2y\lambda = 0 & (2) \\ x + y - 2z\lambda = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

De forma similar al ejemplo pasado, reste las igualdades (1) y (2), esto es

$$\begin{aligned} y - x + 2x\lambda - 2y\lambda = 0 & \Rightarrow (x - y) - 2\lambda(x - y) = 0 \\ & \Rightarrow (x - y)(1 - 2\lambda) = 0 \\ & \Rightarrow x = y \quad \text{ó} \quad \lambda = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Estos dos casos se estudian a continuación.

- Si  $x = y$ , de las igualdades (1), (2) y (3) se obtiene que

$$\begin{cases} x + z + 2x\lambda = 0 \\ x + z + 2x\lambda = 0 \\ x + x - 2z\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z + 2x\lambda = 0 \\ x = z\lambda \end{cases}.$$

De este último sistema es claro que se obtiene la ecuación  $z\lambda + z + 2z\lambda^2 = 0$ , es decir,  $z(2\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$ . De aquí se determinan dos casos: un primer caso se da cuando  $z = 0$ , entonces  $x = 0$  y  $y = 0$ , pero esto no es posible pues contradice la igualdad (4). El segundo caso es que  $2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ , pero esta ecuación cuadrática no posee solución en  $\mathbb{R}$  dado que su discriminante es menor que cero. Por tanto, no se obtuvieron puntos críticos.

- Si  $\lambda = \frac{1}{2}$ , de las igualdades (1), (2) y (3) se forma el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

De lo anterior se tiene que  $x = -y$  y que  $z = 0$ . Estos dos resultados se cambian en la igualdad (4), generando la ecuación  $x^2 + (-x)^2 - (0)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1$ . Así, se obtiene que  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Entonces, los únicos puntos extremos ligados son

$$P_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ y } P_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Para la clasificación de estos dos puntos se utiliza el Hessiano Orlado ( $n = 3$  y  $m = 1$ ), el cual es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2\lambda & 1 & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda & 1 \\ -2z & 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

- Para el punto  $P_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ , recalando que  $\lambda = \frac{1}{2}$ , el Hessiano Orlado queda

$$\tilde{H} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

Los menores principales orlados están dados por

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right| = 16 > 0.$$

Con esta información se tiene que el criterio no decide.

- Para el punto  $P_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ , donde igualmente se tiene que  $\lambda = \frac{1}{2}$ , el Hessiano Orlado es

$$\tilde{H} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales orlados están dados por:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right| = 16 > 0.$$

En este caso, el criterio tampoco decide.

**Ejemplo 4.23** Estudie los extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeto a  $2z = 16 - x^2 - y^2$  y  $x + y = 4$ .

**Solución:** Observe que realmente corresponde al ejemplo 4.16, donde la función Lagrangiana definida fue

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \lambda_2(x + y - 4),$$

y se determinaron los siguientes puntos extremos:  $P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)$ ,  $P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$  y  $P_3(2, 2, 4)$ . Para clasificar estos tres puntos se usa el Hessiano Orlado, con  $n = 3$  y  $m = 2$ , el cual es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & 2y & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2x & 1 & 2 + 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2y & 1 & 0 & 2 + 2\lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el mismo Hessiano Orlado es a la vez el único menor principal orlado. Así se tiene lo siguiente:

- Para el punto  $P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)$ , recuerde que  $\lambda_1 = -1$  (ver ejemplo 4.16), con ello se tiene que

$$\tilde{H}(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(2 + \sqrt{3}) & 2(2 - \sqrt{3}) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2(2 + \sqrt{3}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(2 - \sqrt{3}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que  $|\tilde{H}(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)| = 96 > 0$ , por tanto  $P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1)$  es un punto mínimo ligado.

- Para el punto  $P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$ , igual al anterior  $\lambda_1 = -1$ , entonces se tiene que

$$\tilde{H}(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(2 - \sqrt{3}) & 2(2 + \sqrt{3}) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2(2 - \sqrt{3}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(2 + \sqrt{3}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que  $|\tilde{H}(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)| = 96 > 0$ , por tanto  $P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$  es un punto mínimo ligado.

- Para el punto  $P_3(2, 2, 4)$ , note que  $\lambda_1 = -4$ , así el Hessiano Orlado en el punto  $P_3$  es

$$\tilde{H}(2, 2, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posteriormente se verifica que  $|\tilde{H}(2, 2, 4)| = -48 < 0$ , por tanto  $P_3(2, 2, 4)$  es un punto máximo ligado.

**Ejemplo 4.24** Determine y clasifique los extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , sujeto a  $x + y + z = 3$  y  $z - 1 = 0$ .

**Solución:** Realmente corresponde al ejemplo 4.18, donde se determinó que la función Lagrangiana es  $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(z - 1)$  y el único extremo ligado es

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

$P(1, 1, 1)$ . Luego, el Hessiano Orlado ( $n = 3$  y  $m = 2$ ) es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $|\tilde{H}(1, 1, 1)| = 4 > 0$ , por tanto el punto  $P(1, 1, 1)$  es un mínimo ligado.

**Ejemplo 4.25** Aplique el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$ , sujeto a  $x - z = 1$ ,  $y + z = 2$ .

**Solución:** La función Lagrangiana está definida por  $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + \lambda_1(x - z - 1) + \lambda_2(y + z - 2)$ . Al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0, 0)$  se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y + \lambda_1 = 0 & (1) \\ 2y - 2x - 2z + \lambda_2 = 0 & (2) \\ 2z - 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ x - z - 1 = 0 & (4) \\ y + z - 2 = 0 & (5) \end{cases}.$$

Al sumar las igualdades (1) y (3), y restar (2), se obtiene

$$4x - 6y + 4z = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 2z = 0.$$

Con este resultado, y considerando las ecuaciones (4) y (5), se forma el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}.$$

Este sistema se resuelve de forma sencilla, obteniendo los valores de  $x = \frac{11}{7}$ ,  $y = \frac{10}{7}$  y  $z = \frac{4}{7}$ . Al sustituir estos valores en las ecuaciones (1) y (2) se induce que  $\lambda_1 = -\frac{2}{7}$  y  $\lambda_2 = \frac{10}{7}$  de forma respectiva. Por tanto, el único punto extremo ligado es  $P\left(\frac{11}{7}, \frac{10}{7}, \frac{4}{7}\right)$ . Para su clasificación se

usa el Hessiano Orlado ( $n = 3$  y  $m = 2$ ), como sigue:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El único menor principal es el mismo Hessiano Orlado y además  $\left| \tilde{H} \left( \frac{11}{7}, \frac{10}{7}, \frac{4}{7} \right) \right| = 14 > 0$ . Así, el punto  $P \left( \frac{11}{7}, \frac{10}{7}, \frac{4}{7} \right)$  es un mínimo ligado.

**Ejemplo 4.26** Considere la función  $f(x, y, z) = xyz$  y el conjunto  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3\}$ .

1. Determine, si existen, extremos relativos de  $f$  sobre el interior de  $Q$ .
2. Aplique multiplicadores de Lagrange para determinar si existen, extremos relativos de  $f$  sobre la frontera de  $Q$ .
3. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de  $f$  sobre  $Q$  y los puntos donde se alcanzan.

**Solución:** Para la solución de este ejemplo primero se hace un dibujo del conjunto  $Q$ , que representa el tetraedro ubicado en el primer octante, limitado por el plano  $x + y + z = 3$  y por los planos coordenados  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ . Este dibujo se observa en la figura 4.9.

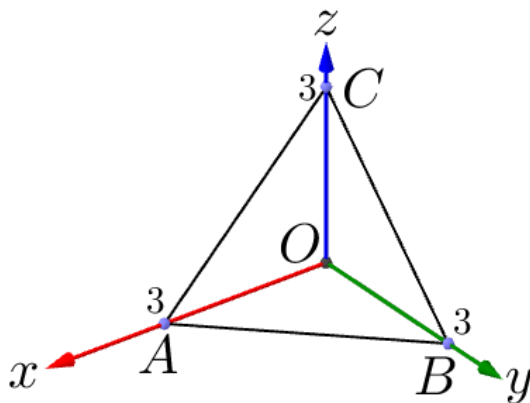


Figura 4.9: Conjunto  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3\}$

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

1. Observe que el interior de  $Q$  ocurre cuando  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ . Se debe hallar los puntos críticos de  $f$  y ver cuáles están dentro de  $R$ . Para ello, observe que  $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  y al hacer  $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$  se obtiene el sistema

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases} .$$

De aquí se deduce que los puntos críticos de  $f$  son de la forma  $(0, 0, z)$  con  $z \in \mathbb{R}$ ,  $(0, y, 0)$  con  $y \in \mathbb{R}$  y  $(x, 0, 0)$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Observe que ninguno de estos puntos está dentro de  $R$ , así  $f$  no posee extremos allí.

2. Para determinar, si existen, los extremos relativos de  $f$  sobre la frontera de  $R$ , note que dicha frontera está formada por 4 caras: la cara  $OAB$ , la cara  $OAC$ , la cara  $OBC$  y la cara  $ABC$ . Cada una de ellas se estudia a continuación:

- Para las caras  $OAB$ ,  $OAC$  y  $OBC$  note que  $z = 0$ ,  $y = 0$  y  $x = 0$  de forma respectiva, así  $f(x, y, z) = xyz$  se convierte en una función constante e igual a cero en que cada una de esas caras.
- Para la cara  $ABC$ , observe que esta corresponde al plano  $x + y + z = 3$  en el primer octante. Así, este caso corresponde a un problema de extremos condicionados (o ligados), donde se deben determinar y clasificar los extremos de  $f(x, y, z) = xyz$  ligado a  $x + y + z - 3 = 0$ . La función Lagrangiana viene dada por

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 3).$$

Al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$  se genera el sistema

$$\begin{cases} yz + \lambda = 0 & (1) \\ xz + \lambda = 0 & (2) \\ xy + \lambda = 0 & (3) \\ x + y + z - 3 = 0 & (4) \end{cases} .$$

De (1), (2) y (3) se tiene que  $yz = xz = xy$ , y usando el hecho que  $x + y + z - 3 = 0$  por la igualdad (4), se obtiene que  $x = 1$ ,  $y = 1$  y  $z = 1$ . Con ello resulta también que  $\lambda = -1$ . Así, el único extremo ligado es  $P(1, 1, 1)$ . Para clasificar este punto, se utiliza el Hessiano Orlado para  $n = 3$  y  $m = 1$ , esto es

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{pmatrix} .$$

Con esto se tiene que  $\tilde{H}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Entonces los menores principales

orlados son

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H}(1, 1, 1) \right| = -3 < 0.$$

De esta manera se concluye que el punto  $P(1, 1, 1)$  es un máximo ligado, siendo a su vez un punto máximo de  $f$  sobre la cara  $ABC$  del tetraedro de la figura 4.9.

- De la parte anterior se induce que el mínimo absoluto de  $f(x, y, z) = xyz$  sobre  $Q$  ocurre en las caras  $OAB$ ,  $OAC$  y  $OBC$ , cuyo valor mínimo es cero. Luego, el máximo absoluto de  $f(x, y, z) = xyz$  ocurre en el punto  $(1, 1, 1)$ , cuyo valor máximo es 1.

**Ejemplo 4.27** Sea  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 + z^2$  y sea  $Q$  la región en el espacio definido por  $2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$ . Determine los extremos de la función  $f$  en  $Q$ . Clasifique los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ .

**Solución:** Note que  $Q : 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$  corresponde al interior de un elipsoide y su frontera.

En este sentido este ejemplo se resuelve primero buscando los extremos de  $f$  en el interior de  $Q$  y luego los extremos de  $f$  en la frontera de  $Q$ . A continuación se detalla estos dos procesos.

- Para los extremos de  $f$  en el interior de  $Q$ , se procede a determinar los puntos críticos de  $f$  y ver cuáles están dentro de  $Q$ . Para ello, observe que el gradiente de  $f$  está dado por  $\nabla f(x, y, z) = (4x + 3y, 3x + 4y, 2z)$ , el cual se iguala al vector cero, esto es

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Así, el único punto crítico obtenido es  $P_1(0, 0, 0)$  y claramente está en el interior de  $Q$ . Además, este punto se debe clasificar usando la matriz Hessiana de  $f$ , la cual es

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de  $H_f$  son:



## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

- $\Delta_1 = |4| = 4 > 0$  (positivo).
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0$  (positivo).
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$  (positivo).

Por tanto  $H_f$  es definida positiva y así  $P_1(0, 0, 0)$  es un mínimo de  $f$ .

2. Para estudiar los extremos de  $f$  en la frontera de  $Q$  se puede ver como un problema de multiplicadores de Lagrange, donde la función  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 + z^2$  está restringida por  $g(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Con ello la función Lagrangiana viene dada por

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 + z^2 + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1).$$

Al hacer  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$  se genera el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4x\lambda = 0 & (1) \\ 3x + 4y + 4y\lambda = 0 & (2) \\ 2z + 2z\lambda = 0 & (3) \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$

De la ecuación (3) se tiene que  $2z(1 + \lambda) = 0$ , así  $z = 0$  ó  $\lambda = -1$ . Estos casos se estudian en seguida.

- Si  $z = 0$ , de la ecuación (4) se obtiene  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ . Por otro lado, al sumar la igualdad (1) y (2) resulta que

$$\begin{aligned} 7x + 7y + 4\lambda(x + y) = 0 & \Rightarrow (x + y)(7 + 4\lambda) = 0 = 0 \\ & \Rightarrow x = -y \text{ ó } \lambda = -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

A partir de lo anterior, si  $x = -y$ , y al sustituir en  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ , se obtiene que  $y = \pm\frac{1}{2}$  y  $x = \mp\frac{1}{2}$ . Entonces los extremos generados son  $P_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$  y  $P_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ .

Ahora, si  $\lambda = -\frac{7}{4}$ , de la ecuación (1) y (2) se induce que  $x = y$ , y al cambiar esto en  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  se llega a que  $y = \pm\frac{1}{2}$  y  $x = \pm\frac{1}{2}$ . Entonces los extremos generados son  $P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  y  $P_5\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ .

- Si  $\lambda = -1$ , de las igualdades (1) y (2) se forma el sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4x = 0 \\ 3x + 4y - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Luego, como  $x = y = 0$ , de la ecuación (4) se infiere que  $z^2 - 1 = 0$ , es decir,  $z = \pm 1$ . Así los extremos son  $P_6(0, 0, 1)$  y  $P_7(0, 0, -1)$ .

Según el enunciado del ejemplo, falta clasificar el punto  $P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  con  $\lambda = -\frac{7}{4}$ , para lo cual se usa la matriz Hessiana Orlada, que está dada por

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 4y & 2z \\ 4x & 4 + 4\lambda & 3 & 0 \\ 4y & 3 & 4 + 4\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Con esto se tiene que  $\tilde{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ , cuyos menores principales orlados son

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 48 > 0 \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \left| \tilde{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right| = -72 < 0.$$

De esta forma se concluye que el punto  $P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  es un máximo ligado.

**Observación 4.12** Se pueden estudiar los extremos de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  restringida a  $m$  ligaduras  $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$  ( $m < n$ ), si no se exige el método de multiplicadores de Lagrange, parametrizando las superficies definidas por las ligaduras y sustituyendo en la función objetivo  $f$ , entonces el problema original se reduce a un problema con  $n - m$  variables sin restricciones. En particular, observe los siguientes dos ejemplos.

**Ejemplo 4.28** Calcule los máximos y mínimos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sujeto a  $x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$  y  $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ .

**Solución:** Se puede convertir este problema de optimización de tres variables con dos restricciones en un problema de optimización de una sola variable mediante una parametrización

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

adecuada de las restricciones del problema.

El dominio de la función objetivo  $f$  queda definido por la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases}$$

con parametrización

$$r(t) = \left( \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \cos t, 2 \operatorname{sen} t \right), \text{ con } t \in [0, 2\pi[.$$

Entonces, el nuevo problema de optimización sería hallar los máximos y mínimos de la nueva función  $g : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} g(t) &= f(r(t)) \\ &= f\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \cos t, 2 \operatorname{sen} t\right) \\ &= \frac{5 \operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Derivando  $g$  con respecto a  $t$  e igualando a cero, se tiene que los puntos críticos en el problema de una variable son  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $t = \pi$ ,  $t = \frac{3\pi}{2}$  y  $t = 2\pi$ , de donde se obtiene los siguientes resultados:

$t$	$r(t)$	$f(x, y, z)$	Condición
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0\right)$	$\frac{3}{2}$	Mínimo
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 0, 2)$	4	Máximo.
$\pi$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, 0\right)$	$\frac{3}{2}$	Mínimo.
$\frac{3\pi}{2}$	$(0, 0, -2)$	4	Máximo.

**Ejemplo 4.29** Calcule los máximos y mínimos de la función  $f(x, y, z) = x + y$  sujeto a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** Se puede convertir este problema de optimización de tres variables con una restricción en un problema de optimización de dos variables sin restricciones mediante una parametrización adecuada de la restricción.

El dominio de la función objetivo  $f$  está definido por la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , con parametrización<sup>8</sup>

$$x = \cos \theta \sen \phi, y = \sen \theta \sen \phi, z = \cos \phi, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi],$$

Entonces, el nuevo problema de optimización sería hallar los máximos y mínimos de la función  $g : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g(\theta, \phi) &= f(\cos \theta \sen \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \phi) \\ &= \cos \theta \sen \phi + \sen \theta \sen \phi. \end{aligned}$$

Derivando  $g$  con respecto a cada una de las variables e igualando a cero,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\sen \theta \sen \phi + \cos \theta \sen \phi = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} = \cos \theta \cos \phi + \sen \theta \cos \phi = 0, \end{cases}$$

se obtienen los puntos críticos  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ,  $(\frac{7\pi}{4}, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ . Usando la Matriz Hessiana ordinaria de orden 2, resultan los siguientes datos:

$(\theta, \phi)$	$(x, y, z) = (\cos \theta \sen \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \phi)$	$f(x, y, z)$	Condición
$(\frac{3\pi}{4}, 0)$	$(0, 0, 1)$	0	No decide.
$(\frac{7\pi}{4}, 0)$	$(0, 0, 1)$	0	No decide.
$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	Máximo.
$(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	Mínimo.

## Ejercicios

**Ejercicio 130** Verifique que la función  $f(x, y, z) = x^3 + x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + xz$  restringida a  $x + y + z = -1$  posee un valor máximo en el punto  $P_1(-1, 2, -2)$  y un valor mínimo en el punto  $P_2(1, 0, -2)$ .

**Ejercicio 131** Demuestre que la función  $f(x, y, z) = x^3 + x^2y + xy^2 + xz$  restringida a  $x + y + z = -1$  posee máximo valor en el punto  $P_1(-\frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9})$  y un mínimo valor en el punto  $P_2(1, 0, -2)$ .

<sup>8</sup>En el Capítulo 6 se estudiará la parametrización de superficies.

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

**Ejercicio 132** Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos absolutos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  restringida a  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ .

**Ejercicio 133** Aplique el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos absolutos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  restringida a  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ .

**Ejercicio 134** Use el método de multiplicadores de Lagrange para mostrar que la función  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$  restringida a  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  tiene como único extremo ligado al punto  $P(3, 3, 3)$  y clasifique dicho punto.

**Ejercicio 135** Use el método de multiplicadores de Lagrange para mostrar que la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  sujeta a las condiciones  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ , tiene como único extremo ligado al punto  $P(3, 3, 3)$  y clasifique dicho punto.

**Ejercicio 136** Use multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos de la función  $f(x, y, z) = xy + xz$  restringida a  $x^2 + y^2 = 1$  y  $y - z = 0$ .

**Ejercicio 137** Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine los extremos de la función  $f(x, y, z) = xyz$  sujeta a las restricciones  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y  $x + y + z = 0$ .

**Ejercicio 138** Utilice multiplicadores de Lagrange para hallar la mayor y la menor distancia desde el origen a la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{3} + \frac{z^2}{36} = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

**Sugerencia:** sea  $(x, y, z)$  un punto de la curva  $\mathcal{C}$ , entonces la distancia del origen a dicha curva está dada por  $d((0, 0, 0), P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , así determine los extremos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sujeta a las restricciones  $\frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{3} + \frac{z^2}{36} = 1$  y  $y - z = 0$ .

**Ejercicio 139** Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos absolutos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  restringida a  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$  y  $x + y - z = 0$ . ¿Qué relación tiene este ejercicio con el anterior?

**Ejercicio 140** Aplique el método de multiplicadores de Lagrange para determinar la distancia mínima entre el plano  $2x + 3y + 6z = 98$  y el elipsoide  $\frac{x^2}{9} + y^2 + 9z^2 = 1$ . **Sugerencia:** por

la fórmula de distancia entre un punto y un plano, considere la función distancia  $d(x, y, z) = \left| \frac{2x + 3y + 6z - 98}{7} \right|$ , y analice los extremos de esta función ligados al elipsoide.

**Ejercicio 141** Sea  $f(x, y, z) = xy^2z^3$  y sea  $Q$  la región en el espacio definida por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Determine los extremos de la función  $f$  en  $Q$ . **Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 4.27.

**Ejercicio 142** Los círculos de Villarceau corresponden a la curva de intersección  $\mathcal{C}$  entre la superficie de revolución  $(x^2 + y^2 + z^2 + 16)^2 - 100(x^2 + y^2) = 0$  y el plano  $3x - 4z = 0$ . Encuentre el máximo y el mínimo valor de la función  $f(x, y, z) = z$  restringida a los círculos de Villarceau. **Sugerencia:** equivale a buscar los valores extremos de la función  $f(x, y, z) = z$  restringida a  $(x^2 + y^2 + z^2 + 16)^2 - 100(x^2 + y^2) = 0$  y  $3x - 4z = 0$ .

**Ejercicio 143** Considere la función  $f(x, y, z) = c_1^2 \cdot x^2 + c_2^2 \cdot y^2 + c_3^2 \cdot z^2$ , donde  $c_k$  para  $k = 1, 2, 3$  son números reales diferentes de cero. Use multiplicadores de Lagrange para mostrar que el **valor mínimo** de  $f(x, y, z)$  restringida al plano  $x + y + z = 1$  es el número

$$c = \left( \sum_{k=1}^3 c_k^{-2} \right)^{-1}.$$

**Ejercicio 144** Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar el mínimo volumen de la región acotada por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y el plano tangente a la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto  $P(x, y, z)$  en el primer octante. **Sugerencia:** por el ejercicio 84, esto equivale a determinar los mínimos de la función  $V(x, y, z) = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}$  restringida al elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Ejercicio 145** Use el método de multiplicadores de Lagrange para hallar y clasificar el único extremo de la función  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$  condicionado por la restricción  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .

**Ejercicio 146** Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para hallar y clasificar los extremos de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  restringido  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$ .

## 4.2. Multiplicadores de Lagrange

**Ejercicio 147** Por medio del método de multiplicadores de Lagrange halle y clasifique los extremos de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  definida para  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $z > 0$ , sujeta a la restricción  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .

**Ejercicio 148** Muestre que la función  $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 2z^2 + x^2y + xy^2 + xz$  sujeta a la restricción  $x + y + z = 1$  posee extremos en los puntos  $P_1\left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$  y  $P_2(-1, 1, 1)$  y clasifíquelos.

**Ejercicio 149** Pruebe que la función  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + x^2y + xy^2 + xz$  sujeta a la restricción  $x + y + z = 1$  posee extremos en los puntos  $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  y  $P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  y clasifíquelos.

**Ejercicio 150** Muestre que la distancia mínima de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  al origen ocurre en los puntos  $P_1(-1, 0)$  y  $P_2(1, 0)$ . Además, compruebe que los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son realmente mínimos.

**Ejercicio 151** Considere la función  $f(x, y) = 2021 - \frac{x^2}{4} - y^2$ , la cual se define sobre la elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ . Encuentre su valor mínimo y el punto (o puntos) donde se alcanza. **Sugerencia:** se está preguntando por los puntos mínimos de la función  $f(x, y) = 2021 - \frac{x^2}{4} - y^2$  restringida a  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Ejercicio 152** Muestre que el punto  $(2, 2, 8)$  es un punto crítico de la función  $f(x, y, z) = xyz$  sujeta a la restricción  $x^2 + y^2 = 16 - z$  y clasifíquelo.

**Ejercicio 153** Sea  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1$  definida sobre la región circular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

1. Hallar y clasificar los puntos críticos de  $f$  dentro de la región  $R$ , es decir, en el disco  $x^2 + y^2 < 4$ .
2. Haciendo uso de multiplicadores de Lagrange, halle y clasifique los extremos de  $f$  en la frontera de  $R$ . **Sugerencia:** considere la función  $f$  ligada a la función  $x^2 + y^2 = 4$ .
3. Determine los extremos absolutos de la función  $f$  en todo  $R$ , es decir, sobre el disco cerrado  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

# Capítulo 5

## Integrales Múltiples

### 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

#### 5.1.1. Integrales dobles sobre regiones rectangulares

**Definición 5.1** (Región rectangular cerrada en  $\mathbb{R}^2$ ) En  $\mathbb{R}^2$  se define un rectángulo cerrado como el producto cartesiano de dos intervalos cerrados de  $\mathbb{R}$ . La región que acota ese rectángulo cerrado se denota como  $R$ , es decir,

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

y se llamará región rectangular cerrada sobre el plano  $xy$ , o simplemente, región rectangular, como lo muestra la figura 5.1.

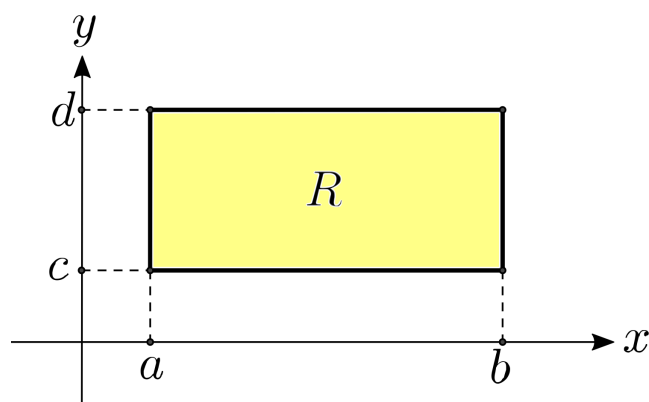


Figura 5.1: Región rectangular cerrada

**Definición 5.2** (Integral doble sobre regiones rectangulares) Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  una región rectangular y sea  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $R$ ,



## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

la expresión

$$I = \iint_R f(x, y) dA$$

se llama integral doble sobre la región rectangular  $R$ , y se calcula haciendo

$$I = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

o bien

$$I = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Teorema 5.1 (Teorema de Fubini)** Sea  $R = [a, b] \times [c, d]$  una región rectangular y sea  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $R$ , entonces

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Ejemplo 5.1** Calcule el valor numérico de  $I = \iint_R \left( 2xy^2 + \frac{y}{x} \right) dA$  donde la región rectangular es  $R = \left[ \frac{1}{2}, 3 \right] \times [-2, 1]$ .

**Solución:** Por el teorema 5.1, basta con calcular  $I = \int_{-2}^1 \left( \int_{1/2}^3 \left( 2xy^2 + \frac{y}{x} \right) dx \right) dy$ , esto es

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^1 \left( \int_{1/2}^3 \left( 2xy^2 + \frac{y}{x} \right) dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^1 \left( x^2 y^2 + y \ln |x| \right) \Big|_{x=1/2}^{x=3} dy \\ &= \int_{-2}^1 \left( \frac{35}{4} y^2 + y \ln 6 \right) dy \\ &= \left( \frac{35}{12} y^3 + \frac{\ln 6}{2} y^2 \right) \Big|_{y=-2}^{y=1} \\ &= \frac{105}{4} - \frac{3 \ln 6}{2} = \frac{3}{4} (35 - 2 \ln 6). \end{aligned}$$

También se pudo haber calculado  $I = \int_{1/2}^3 \left( \int_{-2}^1 \left( 2xy^2 + \frac{y}{x} \right) dy \right) dx$  y el resultado debe ser el mismo, lo cual se invita a comprobar al lector.

### 5.1.2. Integrales dobles sobre regiones más generales

**Definición 5.3 (Región plana de tipo 1 y tipo 2)** Sea  $R$  una región plana de  $\mathbb{R}^2$ , se dice que  $R$  es una región de tipo 1 si es de la forma

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son funciones continuas sobre  $[a, b]$ .

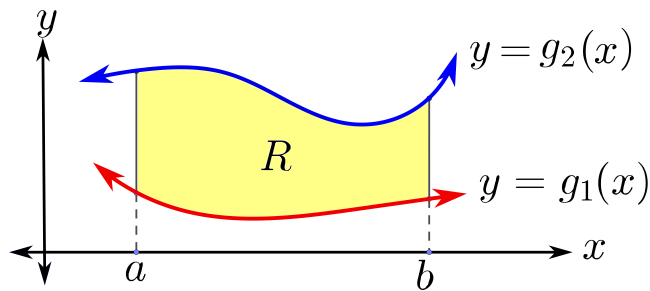


Figura 5.2: Región de tipo 1

De forma similar, si  $R$  es una región plana de  $\mathbb{R}^2$ , se dice que  $R$  es una región de tipo 2 si es de la forma

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  son funciones continuas sobre  $[c, d]$ .

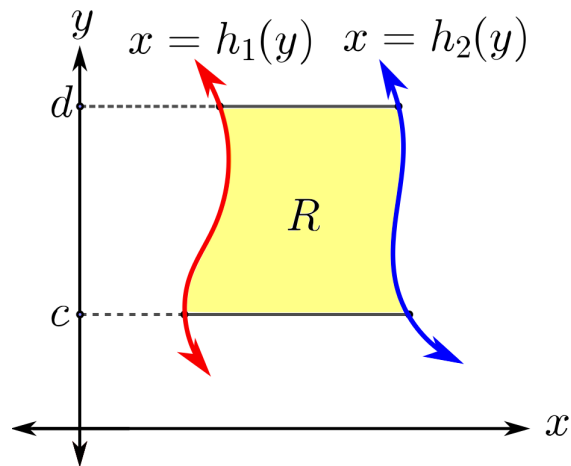


Figura 5.3: Región de tipo 2

**Teorema 5.2** (Integración doble para regiones más generales) Sea la función  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada en  $R$ .

1. Si  $R$  es una región de tipo 1 como la mostrada en la figura 5.2, entonces,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Si  $R$  es una región de tipo 2 como la mostrada en la figura 5.3, entonces,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Además, cualquiera de las dos integrales dobles anteriores generan el mismo resultado, lo cual se ejemplificará con ejemplos más adelante.

**Observación 5.1** En relación con el teorema 5.2 anterior, se debe considerar que:

1. A la región  $R$  se le suele denominar región de integración o dominio de integración.
2. Realmente es una generalización del Teorema de Fubini, correspondiente al teorema 5.2.
3. Por comodidad de notación se suele escribir:

- $\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$ , si  $R$  es de tipo 1. Además se dice que es una integral iterada en el orden  $dy dx$ .
- $\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$ , si  $R$  es de tipo 2. También se dice que es una integral iterada en el orden  $dx dy$ .

**Ejemplo 5.2** Sea  $R$  la región plana acotada por las curvas  $y = \frac{x^2}{2}$  y  $y = x$  en el primer cuadrante. Determine el valor de la integral doble  $I = \iint_R xy dA$ , tanto en el orden de integración  $dy dx$  como  $dx dy$ .

**Solución:** Primero se debe hacer un bosquejo de la región  $R$  dada, el cual corresponde a la figura 5.4.

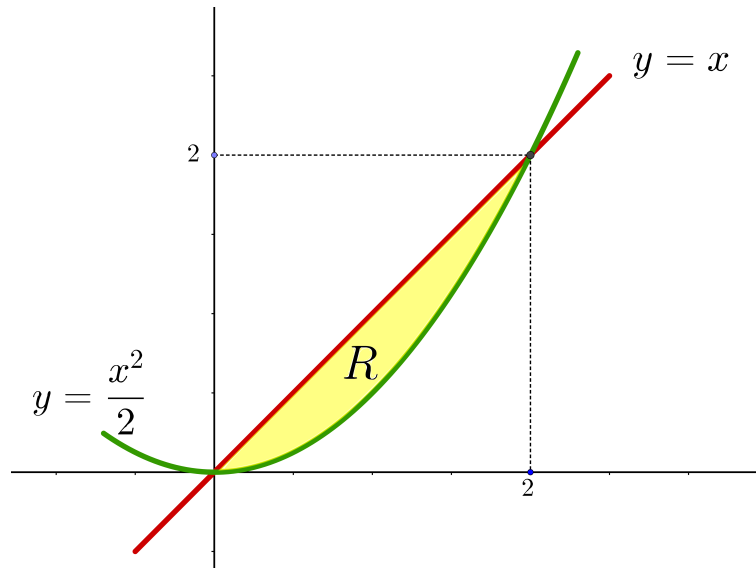


Figura 5.4: Región  $R \subset \mathbb{R}^2$  acotada por las gráficas de  $y = x$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ , en el intervalo  $x \in [0, 2]$

Si se integra  $I$  en el orden  $dydx$ , se debe considerar la región  $R$  como tipo 1, es decir,  $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{2} \leq y \leq x \right\}$ . Así,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R xy \, dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2/2}^x xy \, dydx \\
 &= \int_0^2 \left( x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2/2}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} \right) dx \\
 &= \left( \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Ahora, si se integra  $I$  en el orden  $dx dy$ , se debe considerar la región  $R$  como tipo 2, esto es,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq \sqrt{2y}\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R xy \, dA \\
 &= \int_0^2 \int_y^{\sqrt{2y}} xy \, dx dy \\
 &= \int_0^2 \left( \frac{x^2}{2} y \right) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{2y}} dy \\
 &= \int_0^2 \left( y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy \\
 &= \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Según los resultados de este ejemplo, se puede observar que sin importar el orden de integración en que se determine el valor de la integral doble  $I$  se generó el mismo resultado, esto verifica el teorema 5.2.

**Teorema 5.3 (Propiedades de las integrales dobles)** Sean  $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $R$ , entonces:

1.  $\iint_R kf \, dA = k \iint_R f \, dA$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .
2.  $\iint_R (f \pm g) \, dA = \iint_R f \, dA \pm \iint_R g \, dA$ .
3.  $\iint_R f \, dA = \iint_{R_1} f \, dA + \iint_{R_2} f \, dA$ , donde  $R = R_1 \cup R_2$ , tal que las subregiones  $R_1$  y  $R_2$  no se traslapan o se superponen.
4.  $\iint_R f \, dA \geq 0$  si  $f \geq 0$ .

**Ejemplo 5.3** Sea  $I = \int_0^1 \int_{-x^3}^x f(x, y) \, dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^x f(x, y) \, dy dx$ . Dibuje la región de integración y reescriba la integral  $I$  en el orden  $dx dy$ .

**Solución:** Observe que la región de integración  $R$  es de tipo 1 y corresponde a la unión de dos subregiones, esto es:

$$R = \begin{cases} R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x^3 \leq y \leq x\} \\ R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, x - 2 \leq y \leq x\} \end{cases} .$$

A partir de lo anterior, el recorrido completo de  $x$  ocurre en el intervalo  $[0, 4]$ . En fin, la región  $R$  de integración puede representarse mediante el sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x^3 \\ y = x - 2 \end{cases} \text{ si } x \in [0, 4].$$

Con ello, los dibujos de la región de integración  $R$  tanto de tipo 1 como tipo 2, se observan respectivamente en las figuras 5.5 y 5.6.

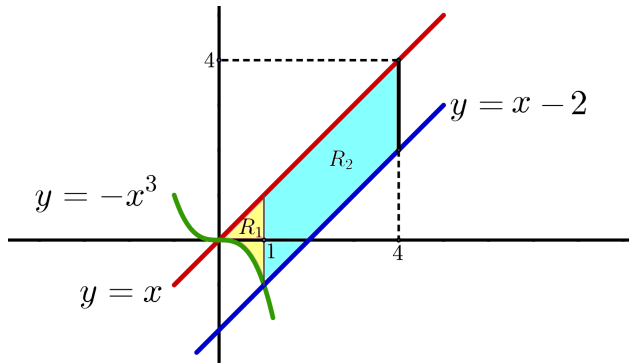


Figura 5.5: Región de tipo 1

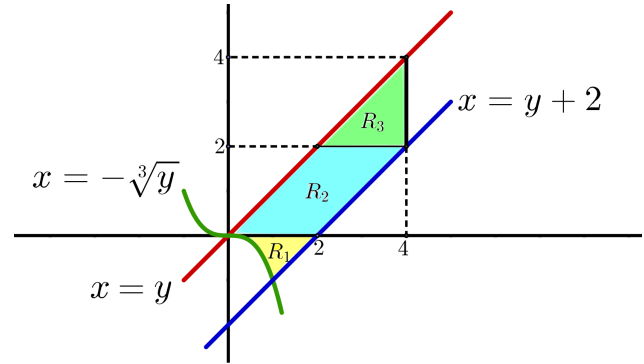


Figura 5.6: Región de tipo 2

Ahora, según la figura 5.6, al considerar región  $R$  de tipo 2 se generan tres subregiones, es decir,

$$R = \begin{cases} R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0, -\sqrt[3]{y} \leq x \leq y + 2\} \\ R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y + 2\} \\ R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4, y \leq x \leq 4\} \end{cases} .$$

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Así el recorrido completo de  $y$  es en el intervalo  $[-1, 4]$  y la integral  $I$  en el orden  $dx dy$  es

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy + \iint_{R_3} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt[3]{y}}^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_y^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_y^4 f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.4** Sea  $I = \int_{-2}^{-1} \int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^0 \int_{x+1}^{x+6} f(x, y) dy dx$ . Reescriba la integral  $I$  en el orden  $dx dy$ .

**Solución:** De forma similar al ejemplo anterior, observe que la región de integración  $R$  es de tipo 1 y corresponde a la unión de dos subregiones, las cuales son

$$R = \begin{cases} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq -1, 4 - 4(x+2)^2 \leq y \leq x+6\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, x+1 \leq y \leq x+6\} \end{cases}.$$

El recorrido completo de  $x$  es en el intervalo  $[-2, 0]$ . Así, la región  $R$  de integración puede representarse mediante el sistema

$$\begin{cases} y = 4 - 4(x+2)^2 \\ y = x+6 \\ y = x+1 \end{cases} \quad \text{si } x \in [-2, 0].$$

Luego, se procede a realizar los dibujos de la región de integración  $R$  tanto de tipo 1 como tipo 2, mostradas en las figuras 5.7 y 5.8 respectivamente.

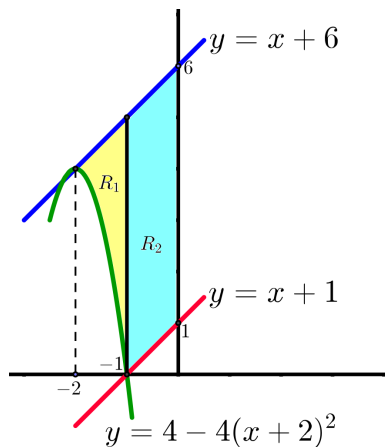


Figura 5.7: Región de tipo 1

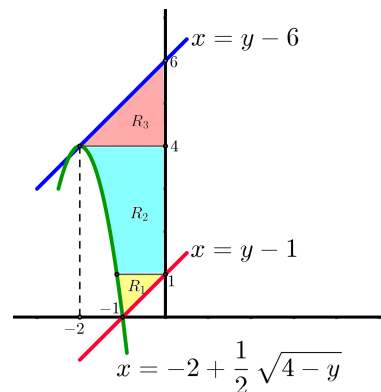


Figura 5.8: Región de tipo 2

En relación con la figura 5.8, el recorrido completo de  $y$  corresponde al intervalo  $[0, 6]$ , además se tiene que la integral  $I$  en el orden  $dx dy$  es

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy + \iint_{R_3} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-2+\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}^{y-1} f(x, y) dx dy + \int_1^4 \int_{-2+\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}^0 f(x, y) dx dy + \int_4^6 \int_{y-6}^0 f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.5** Sea

$$I = \int_0^3 \int_{\sqrt{16+y^2}-4}^{4-\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^3 \int_{4+\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}}^8 f(x, y) dx dy + \int_3^{8\sqrt{2}} \int_{\sqrt{16+y^2}-4}^8 f(x, y) dx dy.$$

Dibuje la región de integración y reescriba la integral en el orden  $dy dx$ .

**Solución:** Note que la región de integración  $R$  es de tipo 2, la cual es la unión de tres subregiones, dadas a continuación.

$$R = \begin{cases} R_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3, \sqrt{16+y^2}-4 \leq x \leq 4-\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2} \right\} \\ R_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3, 4+\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2} \leq x \leq 8 \right\} \\ R_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq y \leq 8\sqrt{2}, \sqrt{16+y^2}-4 \leq x \leq 8 \right\} \end{cases}.$$

Observe que el recorrido completo para  $y$  ocurre en el intervalo  $[0, 8\sqrt{2}]$ . Luego, de  $R_1$  y  $R_3$  se tiene que

$$x = \sqrt{16+y^2}-4 \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

la cual corresponde a una hipérbola centrada en  $(-4, 0)$ . Además, de  $R_1$  se tiene que

$$x = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{9-y^2} \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

siendo una elipse centrada en  $(4, 0)$ . La misma elipse se obtiene de  $R_2$  cuando se hace  $x = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$ . Con esta información, la región  $R$  de integración puede representarse por medio del sistema

$$\begin{cases} \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1 \\ \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x = 8 \end{cases} \text{ si } y \in [0, 8\sqrt{2}].$$



## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Entonces, los dibujos de la región  $R$  tanto de tipo 2 como tipo 1 se presentan en la figura 5.9 y 5.10 respectivamente.

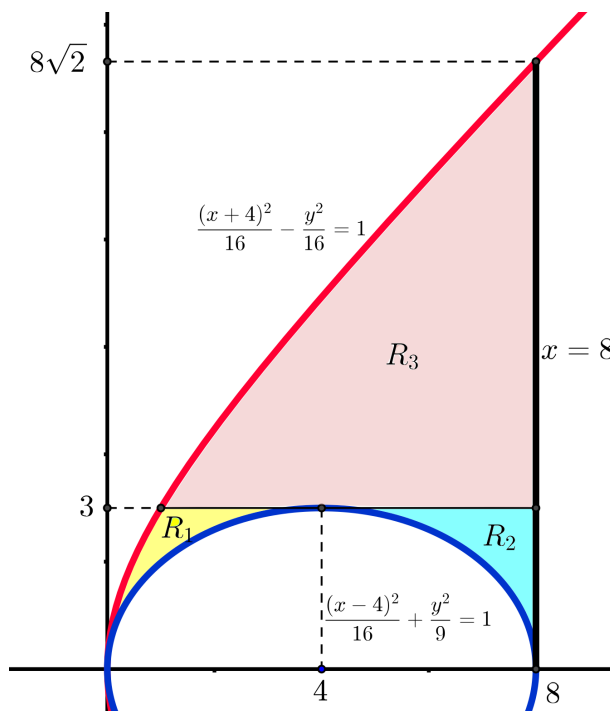


Figura 5.9: Región de tipo 2

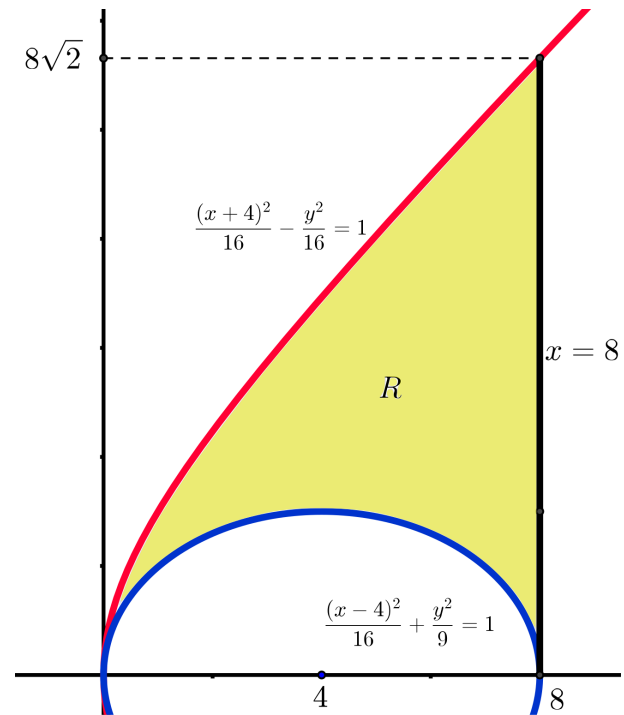


Figura 5.10: Región de tipo 1

Para escribir  $I$  en el orden  $dydx$ , de la hipérbola  $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$  se despeja  $y$ , obteniendo

$$y = \pm \sqrt{(x+4)^2 - 16},$$

de donde se toma el signo positivo pues solo se necesita la parte derecha de la hipérbola.

También, de la elipse  $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  se despeja  $y$ , lo cual resulta

$$y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - (x-4)^2},$$

y puesto que solo se necesita la parte de arriba de la elipse, se considera el signo positivo. Finalmente, con esta información y usando de referencia la figura 5.10 se tiene que el recorrido completo de  $x$  es en el intervalo  $[0, 8]$  y que la integral  $I$  en el orden  $dydx$  es

$$I = \iint_R f(x, y) dydx = \int_0^8 \int_{\frac{3}{4}\sqrt{16-(x-4)^2}}^{\sqrt{(x+4)^2-16}} f(x, y) dydx.$$

**Ejemplo 5.6** Cambie el orden de integración de

$$\int_0^1 \int_{\text{sen}(\pi x)}^{4\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

**Solución:** La región de integración es de tipo 1 y está dada por

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \text{sen}(\pi x) \leq y \leq 4\sqrt{x-x^2} \right\}.$$

De esta región, se hace

$$\begin{aligned} y &= 4\sqrt{x-x^2} \\ \Rightarrow y^2 &= 16(x-x^2) \\ \Rightarrow \frac{y^2}{16} &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ \Rightarrow \frac{y^2}{16} &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{16} &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{2^2} &= 1, \end{aligned}$$

que claramente es una elipse centrada en  $(\frac{1}{2}, 0)$ , de la cual solo se necesita dibujar la parte de arriba. Para graficar  $y = \text{sen}(\pi x)$  tome valores adecuados para  $x \in [0, 1]$  con el fin de visualizar su comportamiento. Con ello, se tiene que el dibujo de la región de integración  $R$  tanto de tipo 1 como tipo 2 corresponde a las figuras 5.11 y 5.12, de forma respectiva.

Para la región de tipo 2, observe que el recorrido completo de  $y$  corresponde al intervalo  $[0, 2]$ . Ahora, si se despeja  $x$  de la elipse  $\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$  se obtiene que

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4-y^2},$$

donde al escoger el signo positivo se dibuja la parte derecha y al seleccionar el signo negativo se bosqueja la parte izquierda de la elipse (ver figura 5.12).

De forma similar, de la función  $y = \text{sen}(\pi x)$  se despeja la variable  $x$ , obteniendo

$$x = \frac{1}{\pi} \text{arc sen } y,$$

5.1. Integrales en  $\mathbb{R}^2$

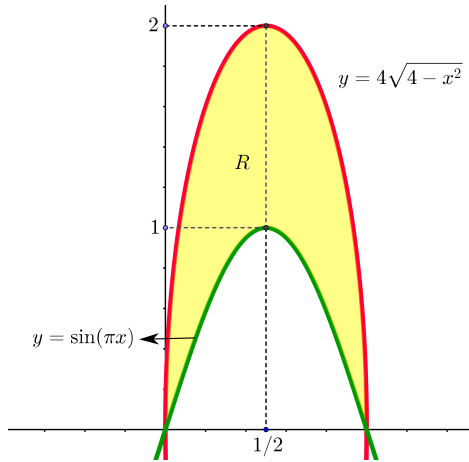


Figura 5.11: Región de tipo 1

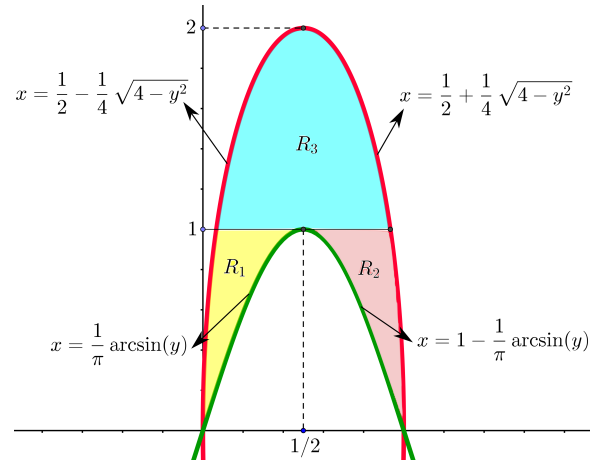


Figura 5.12: Región de tipo 2

sin embargo, esta función se restringe para  $y \in [0, 1]^1$ , entonces  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ . Para modelar la parte en que  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  defina la función

$$x = 1 + \frac{1}{\pi} \arcsen(-y) = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsen y.$$

<sup>1</sup>Según la figura 5.11 la función  $y = \sin(\pi x)$  para que sea biyectiva puede definirse en  $[0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ , por tanto su inversa se define en  $[0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ .

De esta forma, la región  $R$  de tipo 2 está compuesta de tres subregiones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , como lo muestra la figura 5.12, por tanto la integral en el orden  $dx dy$  es

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{\pi} \arcsen y} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{1 - \frac{1}{\pi} \arcsen y}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

**Ejemplo 5.7** Considere la región acotada por las curvas  $y^2 = 2x - x^2$ ,  $2y = x(2 - x)$ ,  $5xy = 2x + 3y$ , como lo muestra la figura 5.13. Escriba la integral  $I = \iint_R f(x, y) dA$  en el orden de integración  $dx dy$  y  $dy dx$ . Puede usar el hecho que  $x^2 + \left(\frac{2x}{5x-3}\right)^2 = 2x$  si  $x \in \{0, \frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\}$ .

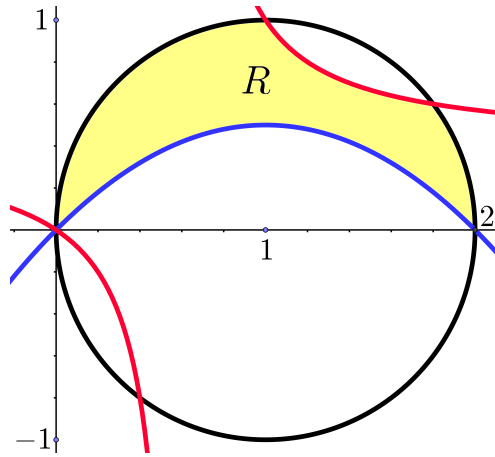


Figura 5.13: Región  $R$

**Solución:** Para escribir la integral doble  $I$  en ambos órdenes de integración, primero se identifican las tres curvas que acotan a la región  $R$ .

1. De la curva  $y^2 = 2x - x^2$ , completando al cuadrado se obtiene  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , que representa la circunferencia centrada en  $(1, 0)$  y de radio 1.
2. En la curva  $2y = x(2 - x)$  se despeja  $y$ , de lo cual resulta la parábola  $y = \frac{2x-x^2}{2}$  que es cóncava hacia abajo y tiene el vértice en el punto  $(1, \frac{1}{2})$ .
3. La curva  $5xy = 2x + 3y$ , de acuerdo con la figura 5.13, representa una hipérbola rotada.

Luego, note que  $x^2 + \left(\frac{2x}{5x-3}\right)^2 = 2x$  si  $x \in \{0, \frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\}$  representan las intersecciones del círculo con la hipérbola. Según la región  $R$  de la figura 5.13, solo se consideran  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = \frac{9}{5}$ . Con estas consideraciones, la región  $R$  de tipo 1 corresponde a la figura 5.14.

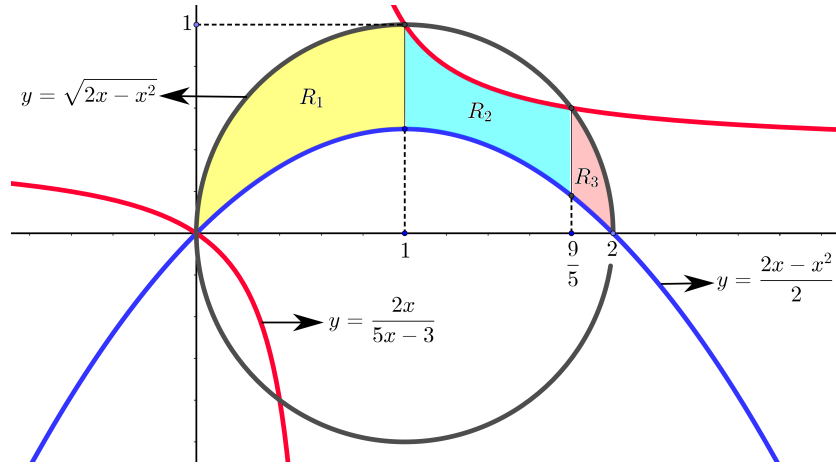


Figura 5.14: Región  $R$  de tipo 1

El recorrido completo en  $x$  es en el intervalo  $[0, 2]$ . Así, la región de integración posee tres subregiones y la integral  $I$  en el orden  $dydx$  es

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{2x-x^2}{2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dydx + \int_1^{\frac{9}{5}} \int_{\frac{2x-x^2}{2}}^{\frac{2x}{5x-3}} f(x, y) dydx + \int_{\frac{9}{5}}^2 \int_{\frac{2x-x^2}{2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dydx.$$

De forma similar, si  $R$  se considera de tipo 2 su dibujo se presenta en la figura 5.15.

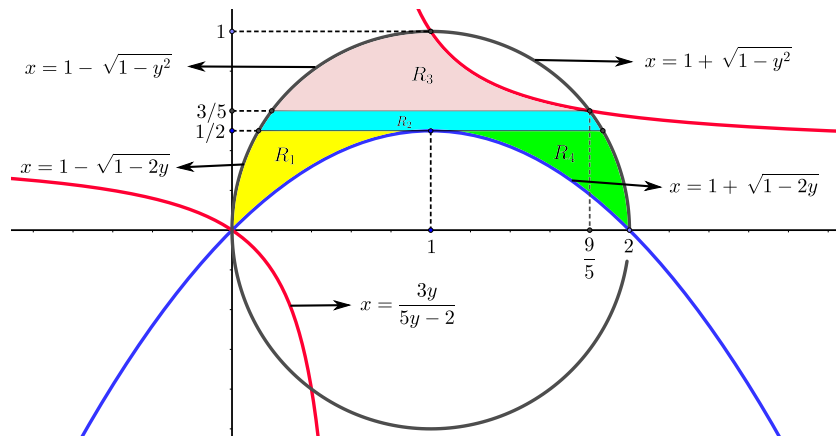


Figura 5.15: Región  $R$  de tipo 2

Con ello, el recorrido completo en  $y$  es en el intervalo  $[0, 1]$ . La región de integración está compuesta por la unión de cuatro subregiones y la integral  $I$  en el orden  $dx dy$  es

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{1-2y}} f(x, y) dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$+ \int_{\frac{3}{5}}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{3y}{5y-2}} f(x, y) \, dx dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1+\sqrt{1-2y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx dy.$$

**Ejemplo 5.8** Considere la región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, 3x \leq 4|y|\}$ . Escriba la integral  $I = \iint_R f(x, y) \, dA$  en ambos órdenes de integración.

**Solución:** La expresión  $x^2 + y^2 \leq 25$  corresponde al interior de la circunferencia centrada en el origen y de radio 5. Por otro lado,  $3x \leq 4|y|$  equivale a la región comprendida a la izquierda de las rectas  $y = \frac{3}{4}x$  y  $y = -\frac{3}{4}x$ . Con ello, un dibujo de la región  $R$  vista como tipo 1 se aprecia en la figura 5.16.

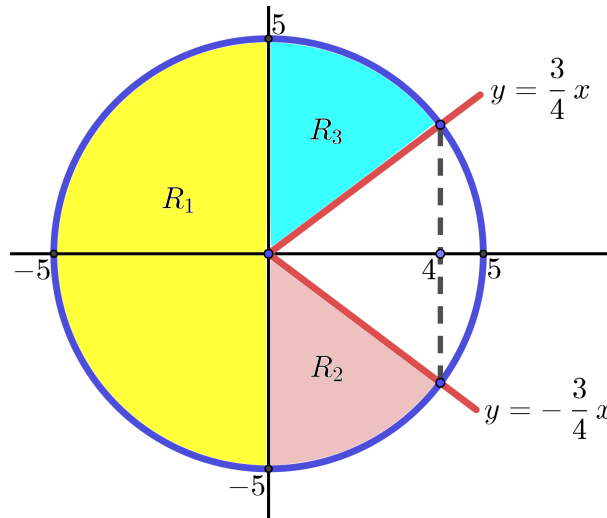


Figura 5.16: Región  $R$  de tipo 2

Así, la integral en el orden  $dydx$  es

$$\int_{-5}^0 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) \, dy dx + \int_0^4 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{-\frac{3}{4}x} f(x, y) \, dy dx + \int_0^4 \int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) \, dy dx.$$

Ahora, un dibujo de la región  $R$  vista como tipo 2 se visualiza en la figura 5.17.

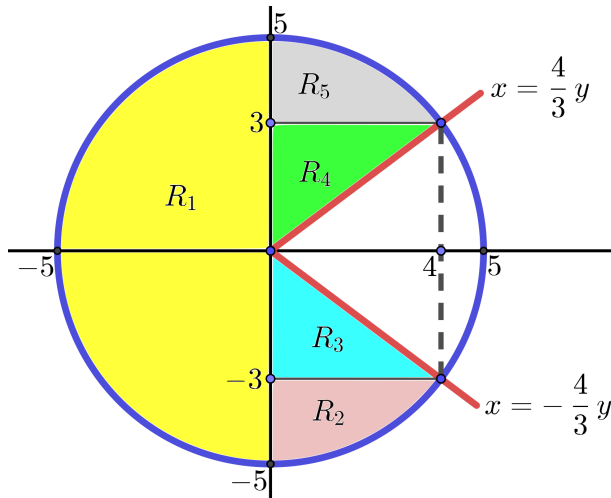


Figura 5.17: Región  $R$  de tipo 2

Con ello, la integral  $I$  en el orden  $dx dy$  es

$$I = \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^0 f(x, y) dx dy + \int_{-5}^{-3} \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_{-3}^0 \int_0^{-\frac{4}{3}y} f(x, y) dx dy \\ + \int_0^3 \int_0^{\frac{4}{3}y} f(x, y) dx dy + \int_3^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

**Ejemplo 5.9** Considere la expresión

$$\int_0^1 \int_{3-\sqrt{9-3y}}^{3+\sqrt{9-3y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{3-\sqrt{y^2-1}}^{3-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{3+\sqrt{y^2-1}}^{3+\sqrt{9-3y}} f(x, y) dx dy,$$

dibuje el dominio de integración de la suma de integrales dadas arriba y rotule claramente las curvas y las intersecciones.

**Solución:** La región  $R$  de integración es la unión de tres subregiones, cuyo recorrido completo en  $y$  ocurre en el intervalo  $[0, 2]$ , esto es

$$R = \begin{cases} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 3 - \sqrt{9 - 3y} \leq x \leq 3 + \sqrt{9 - 3y}\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 3 - \sqrt{9 - 3y} \leq x \leq 3 - \sqrt{y^2 - 1}\} \\ R_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 3 + \sqrt{y^2 - 1} \leq x \leq 3 + \sqrt{9 - 3y}\} \end{cases} .$$

De las tres subregiones anteriores se observa que  $x = 3 \pm \sqrt{9 - 3y}$ , es decir, se obtiene la parábola

$$y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 3 = -\frac{x^2}{3} + 2x,$$

cuyo vértice es el punto  $V(3, 3)$  y las intersecciones con el eje  $x$  ocurren en  $x = 0$  y  $x = 6$ .

De las subregiones  $R_2$  y  $R_3$  se tiene que  $x = 3 \pm \sqrt{y^2 - 1}$ , es decir,

$$y^2 - (x - 3)^2 = 1,$$

la cual es una hipérbola con centro en  $(3, 0)$ , además tiene vértices en  $V_1(3, 1)$  y  $V_2(3, -1)$ .

En relación con la información anterior, la región  $R$  de integración puede representarse mediante el sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 3 = y \\ y^2 - (x - 3)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{si } y \in [8, 8\sqrt{2}].$$

Con el fin de facilitar el bosquejo del dibujo, primero se halla las intersecciones de las dos curvas involucradas en el intervalo  $y \in [0, 2]$ . Para ello, de la segunda curva despeje el término  $(x - 3)^2 = y^2 - 1$  y sustituya en la primera curva, esto es

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}(y^2 - 1) + 3 \\ \Rightarrow y &= -\frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3} + 3 \\ \Rightarrow y^2 + 3y - 10 &= 0 \\ \Rightarrow (y - 2)(y + 5) &= 0 \\ \Rightarrow y &= 2 \quad \text{ó} \quad y = -5. \end{aligned}$$



## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Entonces, el único punto de intersección a valorar ocurre en  $y = 2$ , obteniendo los puntos  $(3 + \sqrt{3}, 2)$  y  $(3 - \sqrt{3}, 2)$ . Finalmente, con toda la información anterior se procede a realizar el dibujo solicitado, el cual se muestra en la figura 5.18.

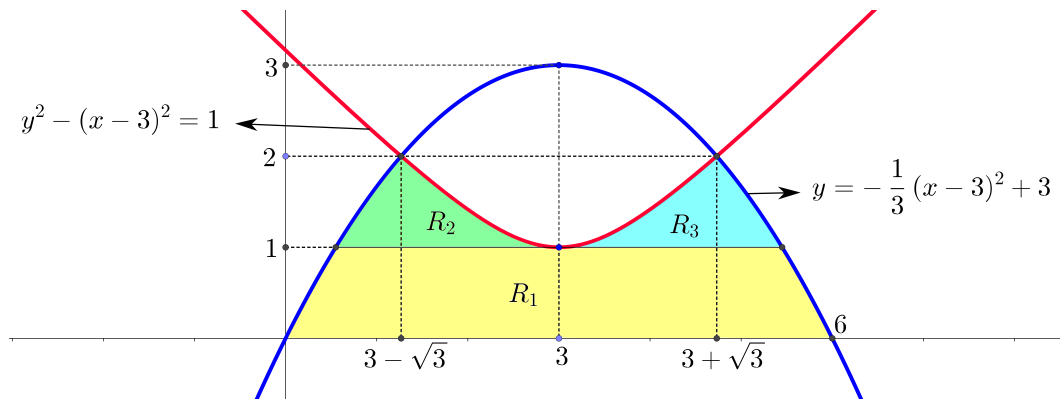


Figura 5.18: Región integración  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

**Ejemplo 5.10** Considere la integral

$$I = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^{y+a} f(x, y) dx dy,$$

con  $a > 0$ . Determine la cantidad de subregiones de que se compone el dominio de integración dibujándola como una región de tipo 1 y reescriba la integral  $I$  según el orden  $dydx$ .

**Solución:** En este caso se tiene que la región de integración es

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a, \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq y + a \right\}.$$

Al escribir  $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ , de donde se obtiene el círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ . Además, si  $x = y + a$  se obtiene la recta  $y = x - a$ , que corta al eje  $y$  en el punto  $(0, -a)$  y al eje  $x$  en el punto  $(a, 0)$ . Tanto el círculo como la recta se dibujan en el intervalo  $y \in [0, a]$ . Así, el dibujo de la región de integración, vista como una región de tipo 1, corresponde a la figura 5.19.

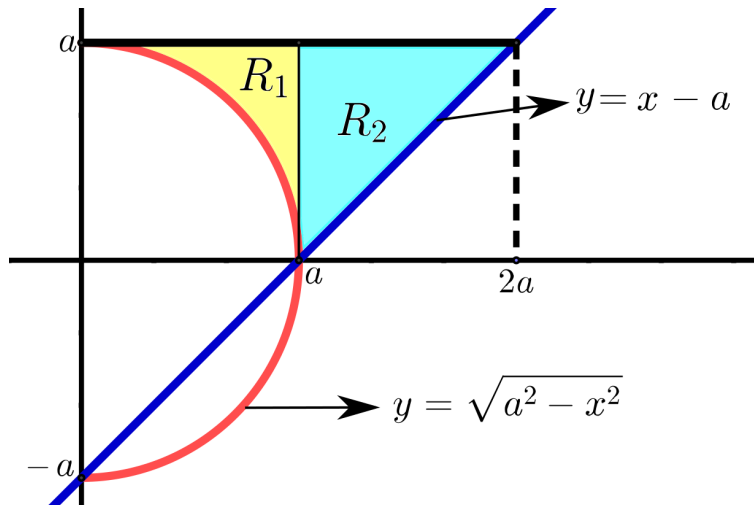


Figura 5.19: Región de integración  $R = R_1 \cup R_2$

De esta forma, el dominio de integración, al dibujarla como una región de tipo 1, posee dos subregiones. Note que el recorrido completo para  $x$  es en el intervalo  $[0, 2a]$ . Luego, la integral doble  $I$  en el orden  $dydx$  es

$$I = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a f(x, y) dydx + \int_a^{2a} \int_{x-a}^a f(x, y) dydx.$$

**Observación 5.2** En ocasiones, dada una región de integración para una integral doble  $I$ , es más factible resolver la integral  $I$  en un cierto orden. Por ello, es usual que en la práctica aparezcan integrales dobles en un orden específico de integración y se solicita el valor de dicha integral, para lo cual es mejor verificar si al cambiar el orden de integración se obtiene el resultado de forma más sencilla.

**Ejemplo 5.11** Calcule  $I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 dx dy$ .

**Solución:** Note que la integral  $I$  es de compleja integración si se hace en el orden  $dx dy$ , por lo que se va cambiar dicho orden a  $dy dx$ . Para ello, la región de integración de  $I$  está dada por  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$ , siendo de tipo 2. Luego, al hacer  $x = \sqrt{y}$  se obtiene  $y = x^2$ , de la cual solo se traza la parte derecha de su gráfica con  $x \in [0, 2]$ . Así el dibujo de  $R$  corresponde a la figura 5.20.

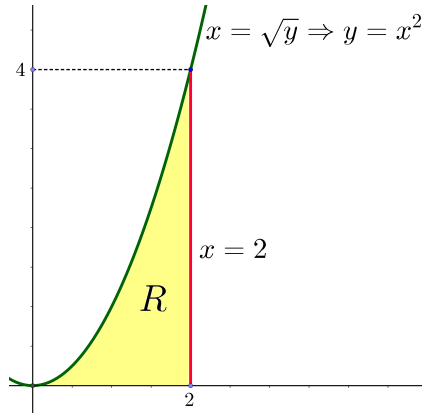


Figura 5.20: Región de integración  $R$

De esta manera la región de integración  $R$  escrita de tipo 1 sería  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$ . Entonces la integral  $I$  se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy dx \\
 &= \int_0^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=x^2} \cos x^5 \, dx \\
 &= \int_0^2 \frac{x^4}{2} \cos x^5 \, dx, \text{ se hace el cambio de variable } u = x^5. \\
 &= \frac{1}{10} \int_0^{32} \cos u \, du \\
 &= \left( \frac{1}{10} \operatorname{sen} u \right) \Big|_{u=0}^{u=32} \\
 &= \frac{1}{10} \operatorname{sen} 32.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.12** Calcular el valor de la integral  $I = \int_0^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^2 \frac{y^2 e^{x^2}}{x^8} \, dx dy$ .

**Solución:** Si se calcula la integral  $I$  en el orden  $dx dy$  es muy complejo ya que no existe una

primitiva clara. Por tal razón se va invertir el orden de integración. Con este propósito, observe que la región de integración es

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 8, y^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 2 \right\}.$$

Observe que si  $x = y^{\frac{1}{3}}$  se obtiene que  $y = x^3$ . Luego, el dibujo de la región  $R$  se muestra en la figura 5.21.

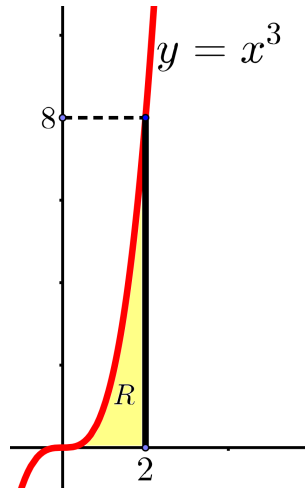


Figura 5.21: Región de integración  $R$

Note que la región  $R$  escrita como tipo 1 sería

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3 \right\}.$$

Así, la integral se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y^2 e^{x^2}}{x^8} dy dx \\ &= \int_0^2 \frac{e^{x^2}}{x^8} \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx \\ &= \int_0^2 \frac{e^{x^2}}{x^8} \frac{x^9}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 x e^{x^2} dx, \text{ se hace el cambio de variable } u = x^2. \\ &= \frac{1}{6} \int_0^4 e^u du \\ &= \frac{1}{6} (e^4 - 1). \end{aligned}$$

### 5.1.3. Área y volumen

Suponga que  $R$  es una región en el plano  $xy$  y que además es de tipo 1, la cual está dada por la expresión

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

También, considere la función constante  $f(x, y) = 1$ , entonces se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_R 1 dA \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx \\ &= \int_a^b y \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx. \end{aligned}$$

De un curso de cálculo en una variable, se sabe que el resultado de esta última integral unidimensional corresponde al área comprendida entre las gráficas de las funciones continuas  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$ , y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ , resultado conocido como **área entre curvas**.

De forma similar ocurre si inicialmente la región plana  $R$  fuera de tipo 2, siendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

obteniendo que

$$\iint_R 1 dA = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy,$$

que determina el área entre las gráficas de las funciones continuas  $h_1(y)$  y  $h_2(y)$ , y las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$ .

Por lo tanto, el área de una región plana  $R$ , puede calcularse por medio de la integral doble

$$\iint_R 1 dA,$$

esto permite escribir la definición dada a continuación.

**Definición 5.4 (Área de una región plana)** Sea  $R$  una región plana de  $\mathbb{R}^2$ , ya sea de tipo 1 o tipo 2, la cual es acotada y cerrada. El área de la región  $R$  se puede calcular como

la integral doble.

$$A_R = \iint_R 1 \, dA.$$

**Ejemplo 5.13** Calcule el área de la región limitada por las rectas  $y - x = 1$ ,  $y - x = -1$ ,  $x + y = 1$  y  $x + y = 2$ .

**Solución:** Si se dibujan las cuatro rectas dadas con sus respectivas intersecciones se obtiene la región mostrada en la figura 5.22, la cual se dibujó como tipo 1 (también se pudo haber dibujado como tipo 2).

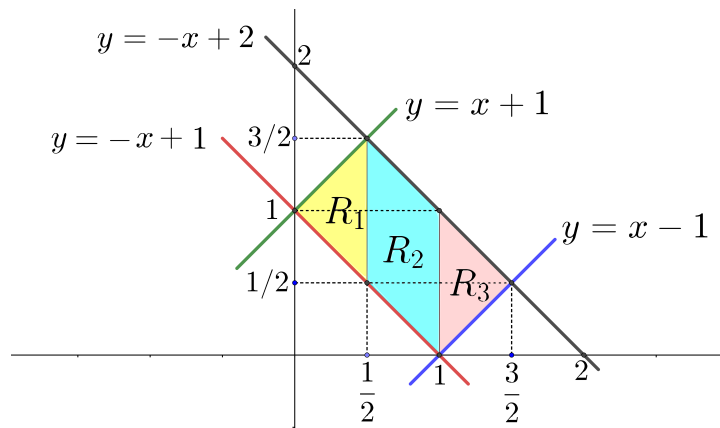


Figura 5.22: Región de integración  $R$  de tipo 1, con  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

De esta forma, la integral doble en el orden  $dydx$  que permite calcular el área de  $R$  es

$$\begin{aligned} A_R &= \int_0^{1/2} \int_{-x+1}^{x+1} 1 \, dydx + \int_{1/2}^1 \int_{-x+1}^{-x+2} 1 \, dydx + \int_1^{3/2} \int_{x-1}^{-x+2} 1 \, dydx \\ &= \int_0^{1/2} (x+1) - (-x+1) \, dx + \int_{1/2}^1 (-x+2) - (-x+1) \, dx \\ &\quad + \int_1^{3/2} (-x+2) - (x-1) \, dx \\ &= \int_0^{1/2} 2x \, dx + \int_{1/2}^1 dx + \int_1^{3/2} (-2x+3) \, dx \\ &= x^2 \Big|_{x=0}^{x=1/2} + x \Big|_{x=1/2}^{x=1} + (-x^2+3x) \Big|_1^{3/2} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, la región  $R$  tiene área igual a una unidad cuadrada.

**Ejemplo 5.14** Determine una integral doble en el orden  $dx dy$  que permita calcular el área de la región acotada por las gráficas de  $y = \frac{x^2 - 4}{4}$  y de  $y = 2 - x$ , esto en el intervalo  $x \in [-6, 2]$ .

**Solución:** En este caso solo se debe plantear (no calcular) la integral doble en el orden  $dx dy$  que permita hallar el área de la región  $R$  acotada y cerrada, la cual se puede expresar mediante el sistema

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ y = \frac{x^2 - 4}{4} \end{cases} \quad \text{si } x \in [-6, 2].$$

Un dibujo de  $R$  vista como una región de tipo 2 corresponde a la figura 5.23.

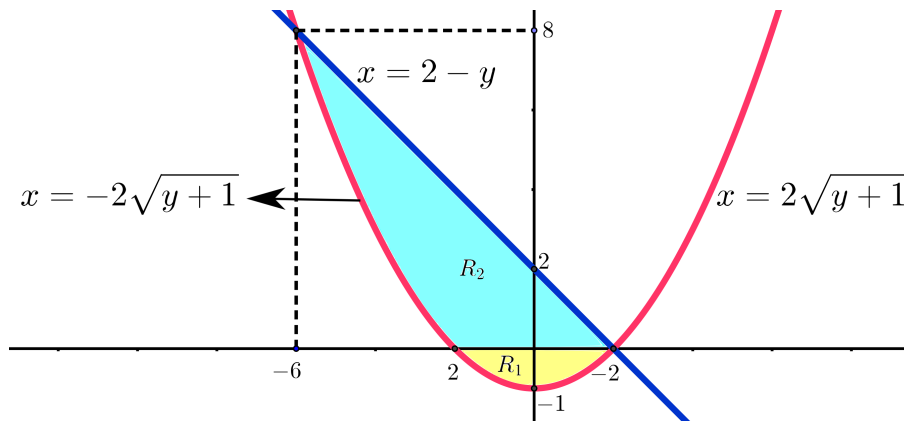


Figura 5.23: Región de integración  $R$  de tipo 2, con  $R = R_1 \cup R_2$

De la parábola  $y = \frac{x^2 - 4}{4}$ , al despejar  $x$  se obtiene que  $x = \pm\sqrt{y+1}$ , de la cual el signo negativo dibuja la parte izquierda y el signo positivo la parte derecha de dicha parábola. Además, el recorrido completo para  $y$  es en el intervalo  $[-1, 8]$ . De esta forma, la integral doble que permite calcular el área de la región  $R = R_1 \cup R_2$  en el orden  $dx dy$  es

$$A_R = \int_{-1}^0 \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} 1 \, dx dy + \int_0^8 \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} 1 \, dx dy.$$

**Ejemplo 5.15** Calcule el área de la región encerrada por las curvas  $y^2 = \frac{x}{2}$  y  $y^2 = x - 4$ .

**Solución:** Al igualar las dos funciones se concluye que la intersección ocurre en el punto  $x = 8$ . Además, si se considera la región  $R$  como tipo 2, un dibujo de dicha región es el visualizado en la figura 5.24.

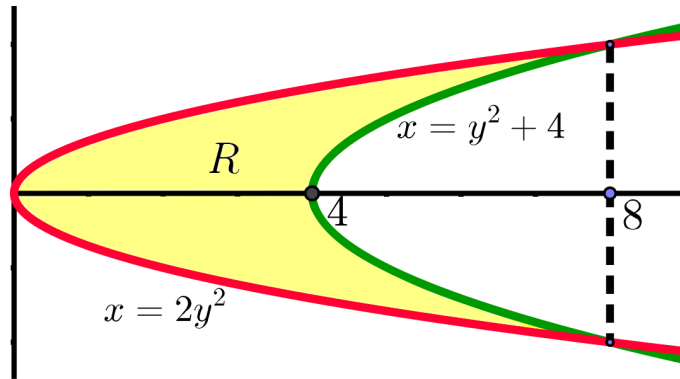


Figura 5.24: Región de integración  $R$  de tipo 2

A partir de ello, el área de la región  $R$  está dada por

$$\begin{aligned}
 A_R &= \iint_R 1 \, dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{2y^2}^{y^2+4} 1 \, dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 (4 - y^2) \, dy \\
 &= \left( 4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=-2}^{y=2} \\
 &= \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.16** Use una integral doble para mostrar que el área de un círculo de radio  $a$  es  $A = \pi a^2$ .



**Solución:** Considere el círculo centrado en  $(0, 0)$  y de radio  $a$  dado por la igualdad  $x^2 + y^2 = a^2$ . Solo se va tomar en cuenta una cuarta parte de dicho círculo, como lo muestra la figura 5.25.

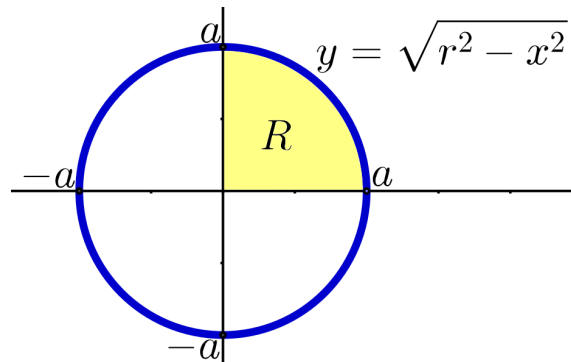


Figura 5.25: Región  $R$  que corresponde a la cuarta parte del círculo  $x^2 + y^2 = a^2$

De la ecuación del círculo se despeja  $y$ , obteniendo  $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ , donde se toma el signo positivo, ya que se necesita la parte de arriba del círculo. También, el recorrido de  $x$  ocurre en el intervalo  $[0, a]$ . Así, el área del círculo es

$$\begin{aligned}
 4A_R &= 4 \iint_R 1 \, dA \\
 &= 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} 1 \, dy dx \\
 &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.
 \end{aligned}$$

Esta integral unidimensional se resuelve por medio de sustitución trigonométrica, donde el cambio de variable es  $x = a \sin \theta$ , entonces  $dx = a \cos \theta \, d\theta$ . Además, si  $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$  y si

$x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ . De esta forma se tendría que

$$\begin{aligned}
 4A_R &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} a^2 \cos \theta \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\
 &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta |\cos \theta| d\theta \\
 &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \text{ pues } \cos \theta \geq 0 \text{ si } \theta \in [0, \pi/2]. \\
 &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= 2a^2 \left( \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
 &= 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \pi a^2.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.17** Muestre que el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $A = \pi ab$ .

**Solución:** Tome como referencia el ejemplo 5.16 resuelto anteriormente. En este sentido, solo se va a considerar una cuarta parte de la elipse según la figura 5.26.

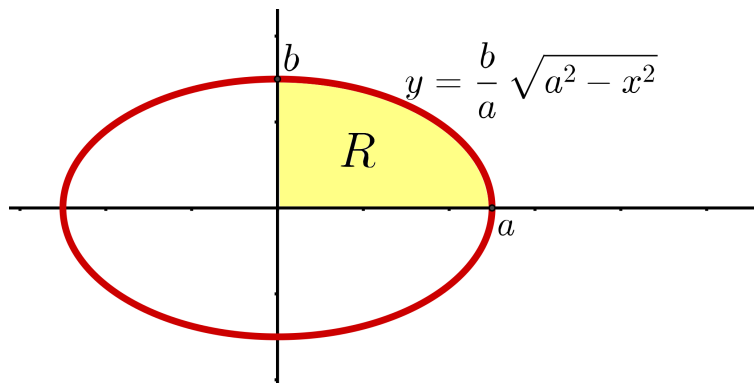


Figura 5.26: Región  $R$  que corresponde a la cuarta parte de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

De la ecuación de la elipse se despeja  $y$ , obteniendo  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , donde se toma el signo positivo, ya que se necesita la parte de arriba de la elipse. Además, el recorrido de  $x$  ocurre en el

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

intervalo  $[0, a]$ . Así, el área de la elipse es

$$\begin{aligned} 4A_R &= 4 \iint_R 1 \, dA \\ &= 4 \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 1 \, dy dx \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx. \end{aligned}$$

En este punto aplique la sustitución trigonométrica  $x = a \operatorname{sen} \theta$ , entonces  $dx = a \cos \theta \, d\theta$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} 4A_R &= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \, d\theta \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\ &= 2ab \left( \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= 2ab \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

**Definición 5.5 (Volumen entre dos superficies)** Sean  $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas tales que  $f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in R$ . Entonces, el volumen entre las superficies  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  con  $(x, y) \in R$  se puede calcular como la integral doble

$$V_Q = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] \, dA,$$

donde  $Q$  denota el sólido formado entre las dos superficies.

**Observación 5.3** De acuerdo con la definición anterior, se debe tener presente que:

1. A la región  $R$  se le llama proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$ .
2. El volumen bajo la superficie  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in R$  se define como la integral doble

$$V_Q = \iint_R f(x, y) \, dA,$$

donde  $Q$  es el sólido formado entre la superficie  $z = f(x, y)$  y la región  $R$  en el plano  $z = 0$  (equivalente al plano  $xy$ ).

**Ejemplo 5.18** Encuentre el volumen del sólido que yace bajo la superficie  $z = 1 + xy$  y sobre el rectángulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ <sup>2</sup>.

**Solución:** Note que  $f(x, y) = 1 + xy \geq 0$  para cada  $(x, y) \in R = [0, 2] \times [0, 1]$ . Entonces se tendría que

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R f(x, y) \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (1 + xy) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \, dx \\ &= 3. \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del sólido  $Q$  que yace bajo la superficie  $z = 1 + xy$  y sobre la región rectangular  $R$  es 3 unidades cúbicas.

**Ejemplo 5.19** Encuentre el volumen del tetraedro limitado por el plano  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  con  $a, b$  y  $c$  todos positivos y el plano  $z = 0$  en el primer octante.

**Solución:** Una figura del tetraedro formado por  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  con  $a, b$  y  $c$  positivos y el plano  $z = 0$  en el primer octante corresponde a la figura 5.27.

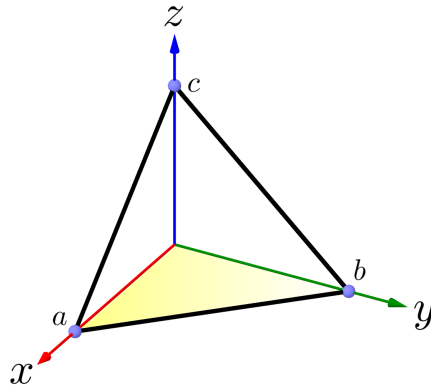


Figura 5.27: Tetraedro formado por el plano  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  en el primer octante

<sup>2</sup>Por comodidad de notación, el rectángulo también se puede escribir como  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ .

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Del plano se obtiene que  $z = f(x, y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ , entonces el volumen del sólido  $Q$ , denominado tetraedro, es

$$V_Q = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dA.$$

Para mayor simplicidad se va a dibujar la región  $R$  en el plano  $xy$  (se obtiene del plano al hacer  $z = 0$ ), lo cual se muestra en la figura 5.28.

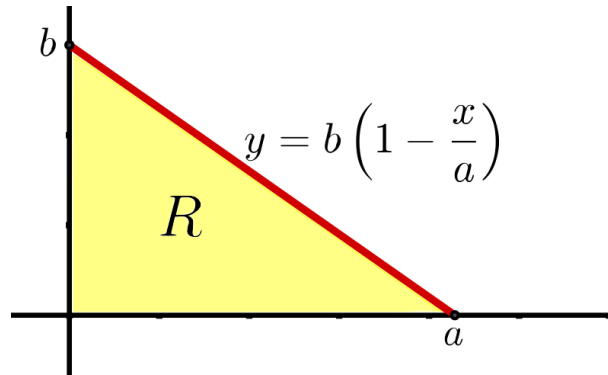


Figura 5.28: Región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\}$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dA \\ &= c \int_0^a \int_0^{b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy dx \\ &= \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx \\ &= \frac{abc}{6}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.20** Plantee la integral doble que permite hallar el volumen del sólido  $Q$  limitado por  $z = 4 - x^2 - 2y^2$  y  $z = 2$ .

**Solución:** Primero note que el sólido es la intersección del paraboloides elíptico  $z = 4 - x^2 - 2y^2$  con el plano  $z = 2$ . Además, la curva de intersección viene dada por  $2 = 4 - x^2 - 2y^2$ , que corresponde a la elipse

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

Dicha elipse está sobre el plano  $z = 2$ , proyectada en el plano  $xy$ . Como segundo paso, se procede a realizar el dibujo que representa el problema, el cual se muestra en la figura 5.29.

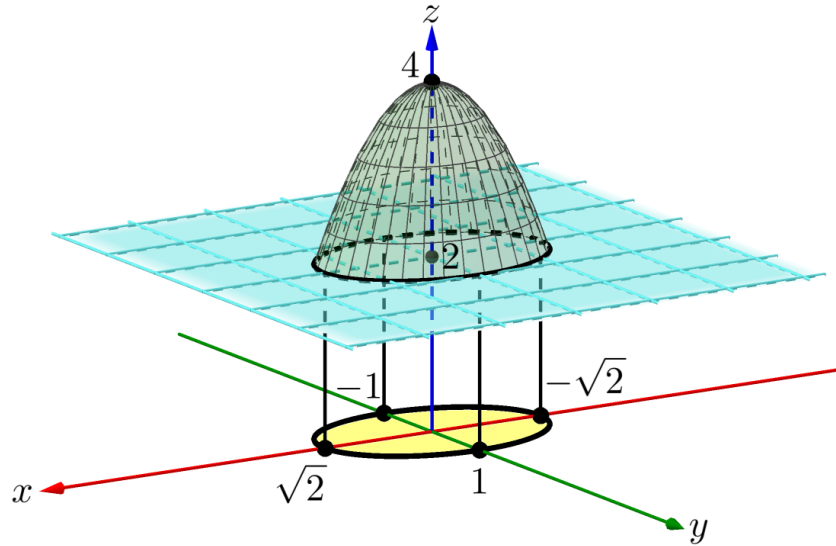


Figura 5.29: Sólido  $Q$  formado por la intersección de las superficies  $z = 4 - x^2 - 2y^2$  y  $z = 2$

Tercero, tome  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$  y  $g(x, y) = 2$ , así, por la definición 5.5, el volumen del sólido  $Q$  está dado por la integral doble

$$V_Q = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA = \iint_R (2 - x^2 - 2y^2) dA,$$

donde la proyección  $R$  corresponde a la región limitada por la elipse  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , de la cual, por facilidad, solo se toma una cuarta parte. Así se tiene que la integral doble buscada es

$$V_Q = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - 2y^2) dy dx.$$

No es parte del ejemplo, pero le queda al lector el cálculo de la integral doble anterior, siendo el resultado  $V_Q = \sqrt{2}\pi$ . El procedimiento puede ser tedioso y puede apoyarse en la sustitución trigonométrica.

## 5.1.4. Cambio de variables en una integral doble

**Teorema 5.4** Sea  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $R$  un conjunto cerrado y acotado y sea  $h : R' \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow R$  una función biyectiva y continuamente diferenciable con  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dA',$$

donde  $J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ , denominada Matriz Jacobiana o Jacobiano.

**Observación 5.4** En relación con el teorema 5.4 se tienen los siguientes puntos.

1. Cuando en una integral doble se hace un cambio de variable  $x = x(u, v)$  y  $y = y(u, v)$ , la región de integración  $R$  se debe cambiar por una nueva región de integración  $R'$ , la cual se puede ver como una deformación de la región, por lo que se necesita un factor de compensación para corregir esta deformación. Este factor es el determinante de la Matriz Jacobiana, el cual **siempre se toma positivo**.
2. La nueva región  $R'$  se puede considerar como tipo 1 o tipo 2, en cuyo caso el  $dA'$  se cambia por  $dvdu$  o bien  $dudv$ , según corresponda.
3. En algunas ocasiones también se puede emplear la fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$ , donde

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 5.21** Calcule  $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx$  empleando el cambio de variables  $x = u(1-v)$  y  $y = uv$ .

**Solución:** Como **primer paso**, se procede a dibujar la región de integración  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$ , la cual se muestra en la figura 5.30.

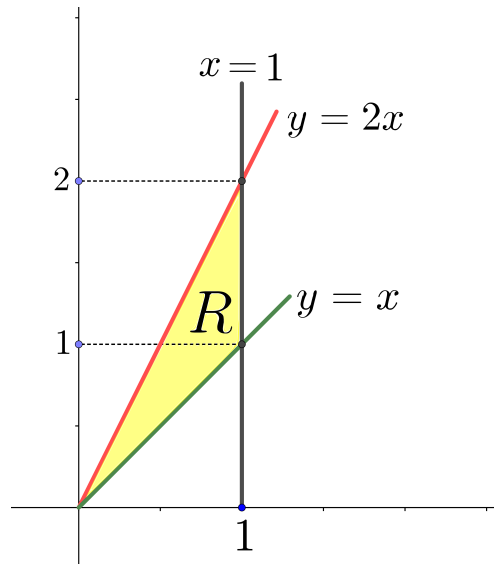


Figura 5.30: Región de integración  $R$

En **segundo lugar**, se procede a analizar las fronteras de la región  $R$  según el cambio de variable sugerido, esto con el fin de determinar  $R'$ .

- Si  $y = x$ , entonces

$$\begin{aligned} uv &= u(1-v) \\ \Rightarrow 2uv - u &= 0 \\ \Rightarrow u(2v-1) &= 0 \\ \Rightarrow u=0 \text{ o } v &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Si  $x = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} u(1-v) &= 1 \\ \Rightarrow u - uv - 1 &= 0 \\ \Rightarrow v = 1 - \frac{1}{u} \text{ o bien } u &= \frac{1}{1-v}. \end{aligned}$$

- Si  $y = 2x$ , entonces

$$\begin{aligned} uv &= 2u(1-v) \\ \Rightarrow 3uv - 2u &= 0 \\ \Rightarrow u(3v-2) &= 0 \\ \Rightarrow u=0 \text{ o } v &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Según los datos anteriores se tiene que  $R' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq v \leq \frac{2}{3}, 0 \leq u \leq \frac{1}{1-v} \right\}$ . Como **tercer paso** se dibuja la nueva región de integración  $R'$ , la cual se muestra en la figura 5.31.

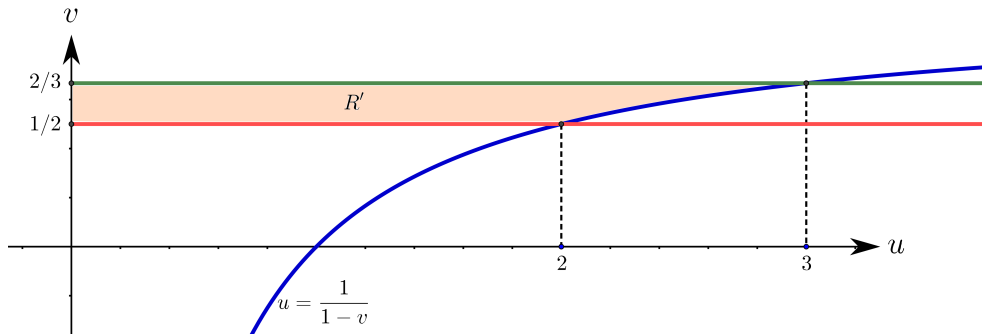


Figura 5.31: Nueva región de integración  $R'$

Ahora, en **cuarto lugar**, se calcula el determinante del Jacobiano, esto es:

$$|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u.$$

Como **quinto y último paso**, se procede a calcular la integral  $I$  según el cambio de variable sugerido.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_x^{2x} dy dx \\ &= \iint_{R'} |J(u, v)| dA' \\ &= \int_{1/2}^{2/3} \int_0^{\frac{1}{1-v}} u \, du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^{2/3} \frac{1}{(1-v)^2} dv \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.22** Empleando transformaciones adecuadas, halle el área de la región limitada por  $x - 2y = 4$ ,  $x - 2y = 0$ ,  $x + y = 4$  y  $x + y = 1$ .

**Solución:** De las rectas dadas se induce que el cambio de variable adecuado es  $u = x - 2y$  y  $v = x + y$ . Luego, siguiendo el esquema de solución del ejemplo anterior, en **primer lugar** un dibujo de la región  $R$  es el mostrado en la figura 5.32.

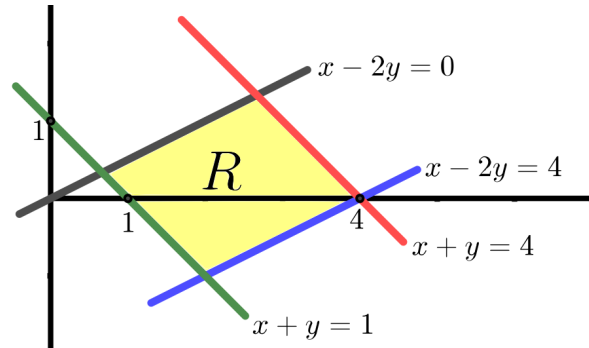


Figura 5.32: Región de integración  $R$

Como **segundo paso**, se analiza las fronteras de  $R$ , esto es:

- Si  $x + y = 1$  entonces  $v = 1$ .
- Si  $x + y = 4$  entonces  $v = 4$ .
- Si  $x - 2y = 4$  entonces  $u = 4$ .
- Si  $x - 2y = 0$  entonces  $u = 0$ .

Con ello, se tendría que  $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\} = [0, 4] \times [1, 4]$ . El **tercer paso** es dibujar dicho rectángulo, el cual se muestra en la figura 5.33.

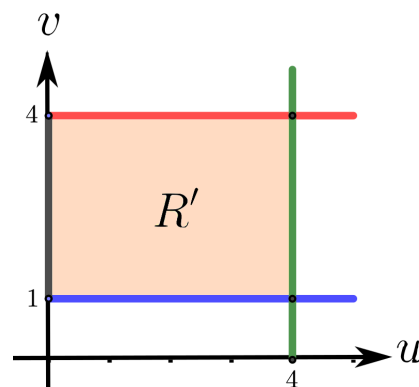


Figura 5.33: Nueva región de integración  $R'$

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

En **cuarto lugar**, el determinante del Jacobiano se calcula con la fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$ , donde

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

por tanto  $|J(u, v)| = \frac{1}{3}$ . Finalmente, como **quinto paso**, se tendría que el área buscada es

$$\begin{aligned} A_R &= \iint_R 1 \, dA \\ &= \iint_{R'} |J(u, v)| \, dA' \\ &= \frac{1}{3} \iint_{R'} 1 \, dA' \\ &= \frac{1}{3} A_{R'} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

**Observación 5.5** En el ejemplo 5.22 anterior, de no usar la fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$  para calcular el determinante del Jacobiano, se debe despejar  $x$  e  $y$  en función de  $u$  y  $v$ . Para ello se considera el sistema

$$\begin{cases} x - 2y = u \\ x + y = v \end{cases},$$

de donde se genera la matriz

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & u \\ 1 & 1 & v \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5u-2v}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-u+v}{3} \end{array} \right).$$

Así,  $x = \frac{5u-2v}{3}$  e  $y = \frac{-u+v}{3}$  y el determinante del Jacobiano viene dado por

$$|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 5.23** Calcule  $I = \iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dA$  donde  $R$  es la región limitada por los ejes coordenados en el primer cuadrante y la recta  $x + y = 2$ . Use un cambio de variables adecuado.

**Solución:** Para calcular la integral doble  $I$  se va emplear el cambio de variable  $u = y - x$  y

$v = y + x$ . **Primero**, un dibujo de la región de integración  $R$  es el mostrado en la figura 5.34.

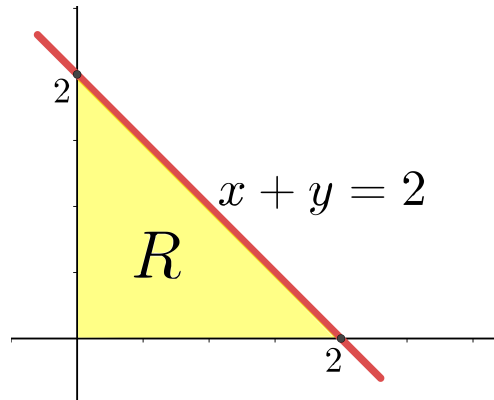


Figura 5.34: Región de integración  $R$

**Segundo**, al analizar las fronteras de  $R$  de acuerdo con el cambio de variable, se tiene lo siguiente.

- Si  $y = 0$ , se obtiene que  $u = -x$  y  $v = x$ , entonces  $v = -u$ .
- Si  $x + y = 2$ , entonces  $v = 2$ .
- Si  $x = 0$ , es claro que  $u = y$  y  $v = y$ , entonces  $v = u$ .

Entonces se concluye que  $R'$  está acotada por las rectas  $v = u$ ,  $v = -u$  y  $v = 2$ . El **tercer paso** es dibujar dicho región, el cual se muestra en la figura 5.35.

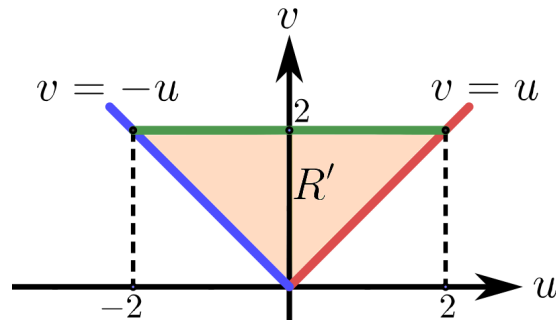


Figura 5.35: Nueva región de integración  $R'$

**Cuarto**, el determinante del Jacobiano se obtiene mediante fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$ , donde

$$|J(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

por tanto  $|J(u, v)| = -\frac{1}{2}$ , el cual se toma positivo.

**Quinto**, la integral  $I$  se calcula sobre la región  $R'$ , esto es:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}} dA \\ &= \iint_{R'} e^{\frac{u}{v}} |J(u, v)| dA' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_0^2 v dv \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \cdot 2 \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

**Observación 5.6** En el ejemplo 5.23 anterior no es difícil obtener que

$$x = \frac{-u + v}{2}, \quad y = \frac{u + v}{2}.$$

De hecho, con estos datos se analiza fácilmente la frontera de  $R$  y se obtiene el determinante del Jacobiano con la fórmula  $|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ .

**Ejemplo 5.24** Sea  $R$  el paralelogramo con vértices en los puntos  $A(\pi, 0)$ ,  $B(2\pi, \pi)$ ,  $C(\pi, 2\pi)$  y  $D(0, \pi)$ . Empleando transformaciones adecuadas, calcule

$$I = \iint_R (x - y)^2 \sin^2(x + y) dA.$$

**Solución:** Sea  $u = x - y$  y  $v = x + y$ , entonces se va calcular la integral  $I$  según este cambio de variable. **Primero**, el dibujo<sup>3</sup> de la región  $R$  está dada en la figura 5.36.

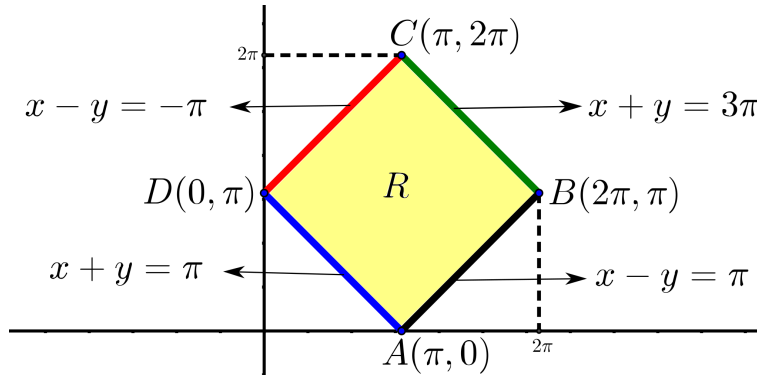


Figura 5.36: Región de integración  $R$

**Segundo**, si se analizan las fronteras de  $R$  según el cambio de variable, se tiene lo siguiente.

- Si  $x - y = \pi$ , entonces  $u = \pi$ .
- Si  $x + y = 3\pi$ , entonces  $v = 3\pi$ .
- Si  $x - y = -\pi$ , entonces  $u = -\pi$ .
- Si  $x + y = \pi$ , entonces  $v = \pi$ .

Con ello se tiene que  $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq u \leq \pi, \pi \leq v \leq 3\pi\} = [-\pi, \pi] \times [\pi, 3\pi]$ . En los últimos pasos proceda a dibujar dicho rectángulo, obtenga el determinante del Jacobiano, el cual es  $|J(u, v)| = \frac{1}{2}$ , para posteriormente calcular la integral doble sobre la región  $R'$ , como sigue.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y) \, dA \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{R'} u^2 \operatorname{sen}^2(v) \, dA' \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \operatorname{sen}^2(v) \, dv \, du \\
 &= \pi^4/3.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.25** Suponga que  $R$  es la región limitada por las curvas  $xy = 1$ ,  $xy = 3$ ,  $x^2 - y^2 = 1$  y  $x^2 - y^2 = 4$ . Determine  $I = \iint_R (x^2 + y^2) \, dA$  aplicando un cambio de variables adecuado.

<sup>3</sup>Las fórmulas para los segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  se obtienen mediante la ecuación de la recta, tomando la pendiente  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  y  $b = y - mx$ .

**Solución:** Sea  $u = xy$  y  $v = x^2 - y^2$ . Aquí no hay necesidad de realizar el dibujo de  $R$ , pero se observa que:

- Si  $xy = 1$ , entonces  $u = 1$ .
- Si  $xy = 3$ , entonces  $u = 3$ .
- Si  $x^2 - y^2 = 1$ , entonces  $v = 1$ .
- Si  $x^2 - y^2 = 4$ , entonces  $v = 4$ .

Es claro que la nueva región es rectangular, dada por  $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 4\} = [1, 3] \times [1, 4]$ . Para el determinante del Jacobiano se usa la fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$ , donde

$$|J(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2),$$

por tanto  $|J(u, v)| = \frac{-1}{2(x^2 + y^2)}$ , el cual se toma positivo. Con esto se tendría que

$$\begin{aligned} I &= \iint_R (x^2 + y^2) dA \\ &= \iint_{R'} (x^2 + y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} dA' \\ &= \frac{1}{2} \iint_{R'} dA' \\ &= \frac{1}{2} A_{R'} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.26** Aplique el cambio de variable  $x = \sqrt{v - u}$  y  $y = u + v$  para calcular la integral

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} \frac{x}{x^2 + y} dy dx.$$

**Solución:** Observe que  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$ , cuyo dibujo se muestra en la figura 5.37.

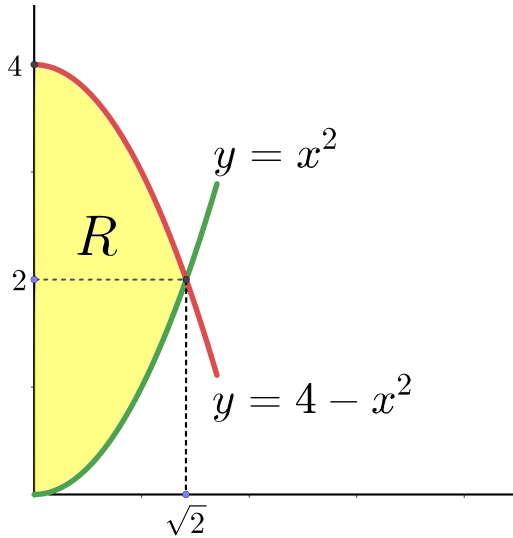


Figura 5.37: Región de integración de  $R$

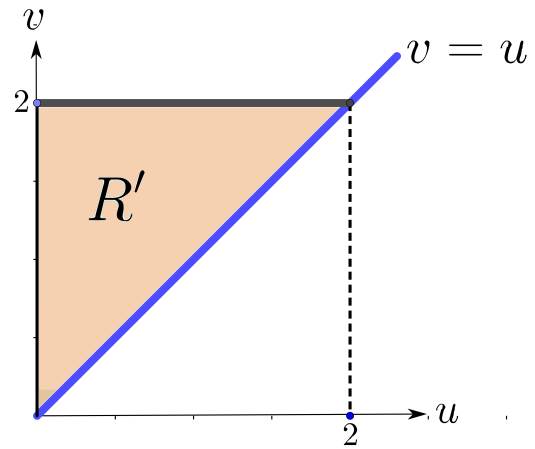


Figura 5.38: Región de integración  $R'$

Para determinar la nueva región  $R'$  se analizan las fronteras de  $R$  según el cambio de variable sugerido, esto es:

- Si  $y = x^2$ , entonces  $u + v = (\sqrt{v - u})^2 \Rightarrow u = 0$ .
- Si  $x = 0$ , entonces  $\sqrt{v - u} = 0 \Rightarrow u = v$ .
- Si  $y = 4 - x^2$ , entonces  $u + v = 4 - (\sqrt{v - u})^2 \Rightarrow v = 2$ .

Note que  $R'$  está acotada por las rectas  $u = 0$ ,  $u = v$  y  $v = 2$ . De hecho, un dibujo de esta nueva región de integración se muestra en la 5.38. Para el determinante del Jacobiano se tiene que

$$|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{v-u}} & \frac{1}{2\sqrt{v-u}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{v-u}}, \text{ el cual se toma positivo.}$$

Observe que el integrando es  $\frac{x}{x^2 + y}$ , el cual se debe escribir en términos de  $u$  y  $v$ , esto es

$$\frac{x}{x^2 + y} = \frac{\sqrt{v-u}}{v-u+u+v} = \frac{\sqrt{v-u}}{2v}.$$



Con ello, la integral  $I$  se calcula como

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} \frac{x}{x^2+y} dy dx \\
 &= \iint_{R'} \frac{\sqrt{v-u}}{2v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v-u}} dA' \\
 &= \iint_{R'} \frac{1}{2v} dA' \\
 &= \int_0^2 \int_0^v \frac{1}{2v} dudv \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.27

Calcule la integral  $I = \iint_R xy dA$ , donde  $R$  es la región limitada por las curvas  $y^2 = 2px$ ,  $y^2 = 2qx$ ,  $x^2 = 2ay$  y  $x^2 = 2by$ , con  $0 < p < q$  y  $0 < a < b$ , en el primer cuadrante, como lo muestra la figura 5.39, por medio del cambio de variable  $u = \frac{y^2}{2x}$  y  $v = \frac{x^2}{2y}$ .

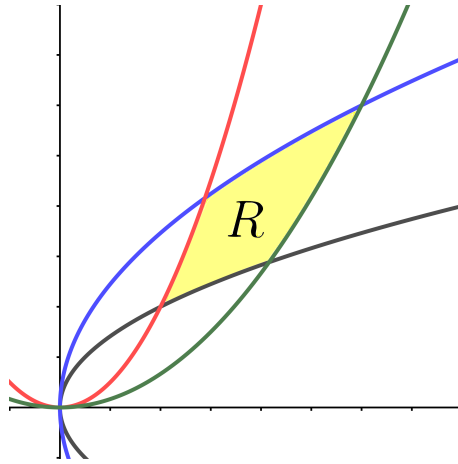


Figura 5.39: Región de integración  $R$

**Solución:** Según la información dada, observe que  $R$  está limitado por las curvas  $\frac{y^2}{2x} = p$ ,

$\frac{y^2}{2x} = q$ ,  $\frac{x^2}{2y} = a$  y  $\frac{x^2}{2y} = b$ . Al analizar las fronteras de  $R$  de acuerdo con el cambio de variable sugerido, se concluye que la nueva región de integración  $R'$  es un rectángulo en el plano  $uv$ , es decir,  $R' = [p, q] \times [a, b]$ .

Para el determinante del Jacobiano se usa la fórmula  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$ , donde

$$|J(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & \frac{-x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{-y^2}{2x^2} \cdot \frac{-x^2}{2y^2} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{3}{4},$$

por tanto  $|J(u, v)| = -\frac{4}{3}$ , el cual se toma positivo. Además, para el integrando de la integral  $I$ , observe que<sup>4</sup>

$$xy = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = 4 \left( \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{y^2}{2x} \right) = 4uv.$$

De esta forma la integral  $I$  quedaría como

$$\begin{aligned} I &= \iint_R xy \, dA \\ &= \iint_{R'} 4uv \cdot \frac{4}{3} \, dA' \\ &= \frac{16}{3} \int_p^q \int_a^b uv \, dudv \\ &= \frac{4}{3} (q^2 - p^2)(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.28** Sea  $I = \iint_R (\sin x + \cos x) \, dA$ , donde  $R$  es la región del primer cuadrante que contiene al origen, limitada por las curvas  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  y  $y = 0$ . Dibuje la región  $R$  y calcule  $I$  usando el cambio de variable  $u = \cos x - y$  y  $v = \sin x - y$ .

**Solución:** El dibujo de  $R$  se muestra en la figura 5.40.

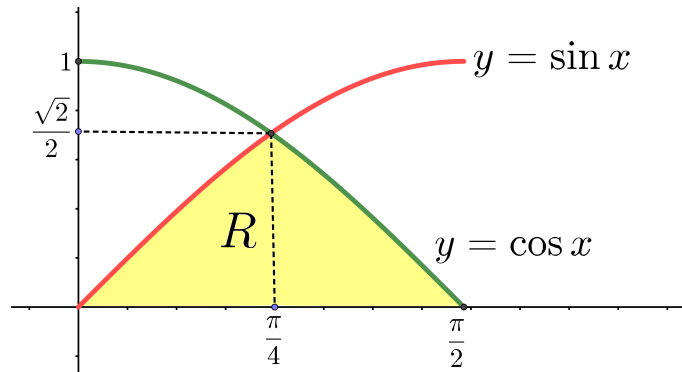


Figura 5.40: Región de integración  $R$

<sup>4</sup>Otra opción es despejar  $x$  y  $y$  en función de  $u$  y  $v$ , obteniendo  $x = 2\sqrt[3]{u^2v}$  y  $y = 2\sqrt[3]{uv^2}$ .

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Para proceder a analizar las fronteras de  $R$  según el cambio de variable sugerido, note que si  $u = \cos x - y$  y  $v = \sin x - y$ , entonces  $\cos x - u = \sin x - v$ , de donde se deduce que  $u - v = \cos x - \sin x$ . Con ello se tiene que:

- Si  $y = \sin x$ , entonces

$$\begin{aligned} u = \cos x - \sin x &\Rightarrow u = u - v \\ &\Rightarrow v = 0. \end{aligned}$$

Esto también es inmediato pues si  $v = \sin x - y$  y si  $y = \sin x$ , entonces  $v = 0$ .

- Si  $y = \cos x$ , de forma similar al anterior, se deduce que  $u = 0$ .
- Si  $y = 0$ , entonces  $u = \cos x$  y  $v = \sin x$ , de donde se deduce que  $u^2 + v^2 = 1$ , siendo esto un círculo centrado en el origen y de radio 1, en el plano  $uv$ .

De acuerdo con la información anterior, la nueva región de integración  $R'$  está acotada por las rectas  $u = 0$ ,  $v = 0$  y el círculo  $u^2 + v^2 = 1$ , cuyo dibujo se muestra en la figura 5.41.

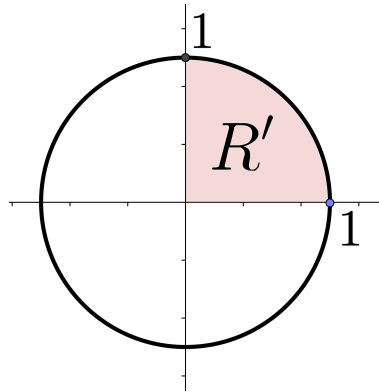


Figura 5.41: Nueva región de integración  $R'$

Para el determinante del Jacobiano note que

$$|J(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ \cos x & -1 \end{vmatrix} = \sin x + \cos x,$$

entonces  $|J(u, v)| = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ . Finalmente, la integral  $I$  se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \iint_R (\operatorname{sen} x + \cos y) \, dA \\ &= \iint_{R'} \operatorname{sen} x + \cos y \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dA' \\ &= \iint_{R'} dA' \\ &= A_{R'} = \frac{\pi \cdot (1)^2}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.29** Sea  $P$  uno de los puntos de intersección de las parábolas  $y^2 = 64 - 16x$ ,  $y^2 = 4x + 4$ , y sea  $R$  la región limitada por la primera parábola, el eje  $x$  y el segmento  $\overline{OP}$ , donde  $O$  es el origen. Use el cambio de variables  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ , para calcular la integral

$$I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dA.$$

**Solución:** Para hallar el punto de intersección  $P$  entre las parábolas  $y^2 = 64 - 16x$ ,  $y^2 = 4x + 4$ , se forma la ecuación:

$$64 - 16x = 4x + 4,$$

dando como respuesta  $x = 3$ , entonces  $y = \pm 4$ . Tome  $P(3, 4)$  (también se pudo haber tomado  $P(3, -4)$ ). Así, un dibujo de la región  $R$  de integración corresponde a la figura 5.42

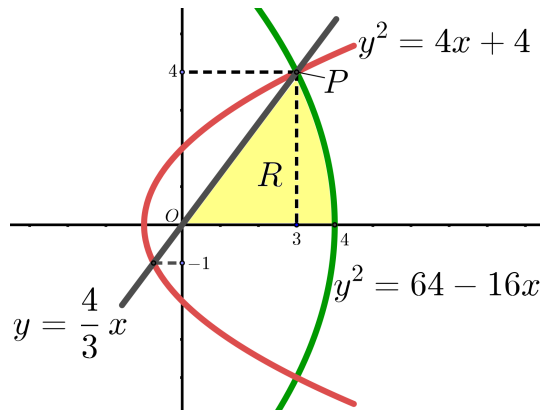


Figura 5.42: Región de integración  $R$ .

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

La ecuación de la recta<sup>5</sup> que contiene el segmento  $\overline{OP}$  es  $y = \frac{4}{3}x$ . El análisis de las fronteras de  $R$  se muestran a continuación.

- Si  $y = 0$ , entonces  $2uv = 0$ , así  $u = 0$  o  $v = 0$ .
- Si  $y^2 = 64 - 16x$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (2uv)^2 = 64 - 16(u^2 - v^2) &\Rightarrow 4u^2 + u^2v^2 - 4v^2 - 16 = 0 \\
 &\Rightarrow 4u^2 + u^2v^2 - 4v^2 - 16 = 0 \\
 &\Rightarrow u^2(4 + v^2) - 4(v^2 + 4) = 0 \\
 &\Rightarrow (v^2 + 4)(u^2 - 4) = 0 \\
 &\Rightarrow u^2 - 2 = 0 \text{ pues } v^2 + 4 \neq 0 \\
 &\Rightarrow u = \pm 2.
 \end{aligned}$$

- Si  $y = \frac{4}{3}x$ , entonces

$$\begin{aligned}
 2uv = \frac{4}{3}(u^2 - v^2) &\Rightarrow 2v^2 - 3uv - 2u^2 = 0 \\
 &\Rightarrow (2v + u)(v - 2u) = 0 \\
 &\Rightarrow v = -\frac{u}{2} \text{ o } v = 2u.
 \end{aligned}$$

Según la información anterior y como  $R'$  debe estar en el primer cuadrante, debe estar limitado por las rectas  $v = 0$ ,  $u = 2$  y  $v = 2u$ . Su dibujo se muestra en la figura 5.43

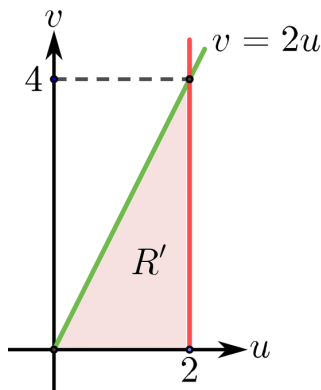


Figura 5.43: Nueva región de integración  $R'$

<sup>5</sup>Utilice las fórmulas  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  y  $y = b - mx$ , considerando los puntos  $O(0, 0)$  y  $P(3, 4)$ .

Para el determinante del Jacobiano se tiene que

$$|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2).$$

También, note que el integrando de  $I$  es  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , donde

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2} \\ &= \sqrt{u^4 + 2u^2v^2 + v^4} \\ &= \sqrt{(u^2 + v^2)^2} \\ &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Entonces, la integral  $I$  se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA \\ &= \iint_{R'} \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 4(u^2 + v^2) dA' \\ &= 4 \iint_{R'} dA' \\ &= 4A_{R'} \\ &= 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} = 16. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.30** Aplique el cambio de variables  $x = u + uv$ ,  $y = v + uv$ , para determinar el valor de  $I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{(x - y)^2 + 2(x + y) + 1}} dA$ , en donde la región  $R$  es el triángulo con vértices  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$  y  $C(2, 2)$ .

**Solución:** Un dibujo de la región  $R$  se muestra en la figura 5.44

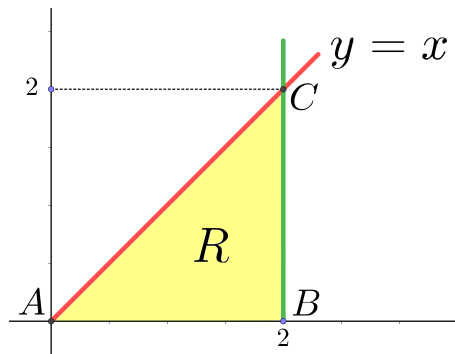


Figura 5.44: Región de integración  $R$

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

Al analizar las fronteras de  $R$  según el cambio de variable sugerido, se tiene que

- Si  $y = 0$ , entonces  $v + uv = 0$ , de donde se deduce que  $v = 0$  o  $u = -1$ .
- Si  $x = 2$ , entonces  $u + uv = 2$ , así  $v = \frac{2-u}{u}$ .
- Si  $y = x$ , entonces  $v + uv = u + uv$ , es decir,  $v = u$ .

Como la nueva región de integración  $R'$  debe estar en el primer cuadrante, se obtiene que debe estar limitada por  $v = 0$ ,  $v = \frac{2-u}{u}$  y  $v = u$ , cuyo dibujo se encuentra en la figura 5.45.

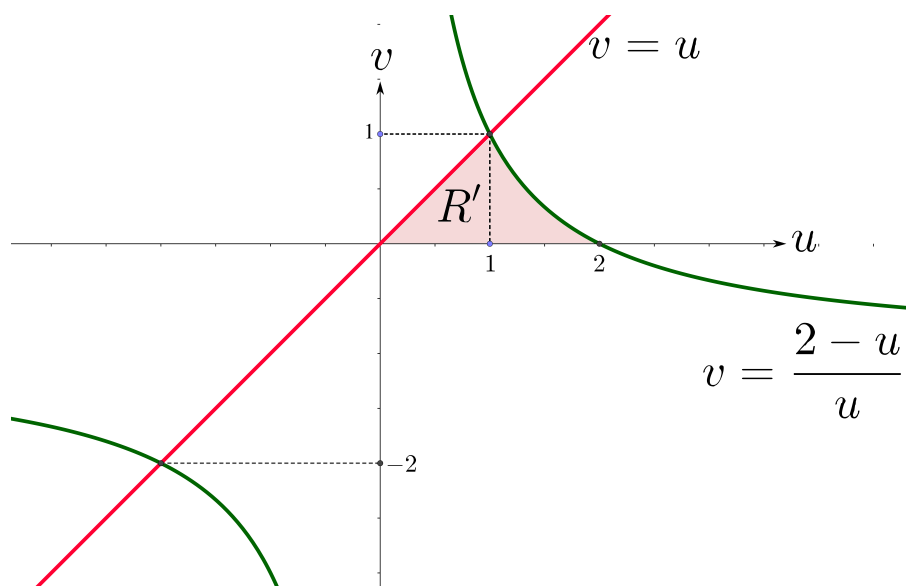


Figura 5.45: Nueva región de integración  $R'$

También, para el determinante del Jacobiano se tiene que

$$|J(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+v & 1+u \\ v & 1 \end{vmatrix} = (1+v)(1+u) - uv = u + v + 1.$$

Para el integrando de  $I$ , el cual es  $\frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1}}$ , observe que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1} &= \sqrt{(u+uv-v-uv)^2 + 2(u+uv+v+uv) + 1} \\ &= \sqrt{(u-v)^2 + 2u + 4uv + 2v + 1} \\ &= \sqrt{u^2 + 2uv + v^2 + 2u + 2v + 1} \\ &= \sqrt{(u+v)^2 + 2(u+v) + 1} \\ &= \sqrt{(u+v+1)^2} \\ &= u+v+1. \end{aligned}$$

Con toda la información anterior, la integral  $I$  se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y)}} dA \\ &= \iint_{R'} \frac{1}{u+v+1} \cdot (u+v+1) dA' \\ &= \int_0^1 \int_v^{\frac{2}{1+v}} dudv \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.31** Usar el cambio de variables  $u = \operatorname{sen} x \cos y$  y  $v = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$  para expresar la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}} dx dy$$

como una integral doble definida que solo dependa de  $u$  y  $v$ .

**Solución:** Es claro que la región de integración  $R$  en el plano  $xy$  corresponde al cuadrado dado por  $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ . Al analizar las fronteras se tiene lo siguiente.

- Si  $y = 0$ , entonces  $u = \operatorname{sen} x$  y  $v = 0$ , es decir,  $u^2 + v^2 = \operatorname{sen}^2 x$ . Como  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , se tiene que  $u^2 + v^2 \leq 1$ .
- Si  $x = \frac{\pi}{2}$ , entonces,  $u = \cos y$  y  $v = \operatorname{sen} y$ , de donde se deduce que  $u^2 + v^2 = 1$ .
- Si  $x = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $u = 0$  y  $v = \operatorname{sen} x$ , es decir,  $u^2 + v^2 = \operatorname{sen}^2 x$ . Así  $u^2 + v^2 \leq 1$  pues  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $x = 0$ , entonces  $u = 0$  y  $v = 0$ .



## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

De lo anterior se concluye que el nuevo dominio de integración  $R'$  está limitado por el círculo  $u^2 + v^2 = 1$  en el primer cuadrante. Ahora, para el determinante del Jacobiano note que

$$\begin{aligned} |J(x, y)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos x \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} x \cos y \end{vmatrix} \\ &= \cos x \operatorname{sen} x \cos^2 y + \cos x \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y \\ &= \cos x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Con ello se cumple que  $|J(u, v)| = \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}$ . Luego, al multiplicar este resultado con integrando de  $I$  se tiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}} \cdot \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}} \cdot \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}} \cdot \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}} \cdot \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Como  $u^2 + v^2 = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow u^2 + v^2 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ . Entonces, la integral doble  $I$  definida solo en términos de  $u$  y  $v$  queda como

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{1-u^2-v^2}} du dv.$$

**Ejemplo 5.32** Use el cambio de variable  $u = xy$  y  $v = \frac{y}{x}$  para hallar el volumen del sólido limitado por las superficies  $z = x + y$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $z = 0$ , con  $x > 0$  y  $y > 0$ .

**Solución:** Observe que el cuerpo sólido está limitado arriba por el plano  $z = x + y$ , sus caras laterales por las superficies  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$  y  $y = 2x$  ( $x > 0$  y  $y > 0$ ) e inferiormente por el plano  $z = 0$ . Además, la proyección  $R$  corresponde a la región mostrada en la figura 5.46.

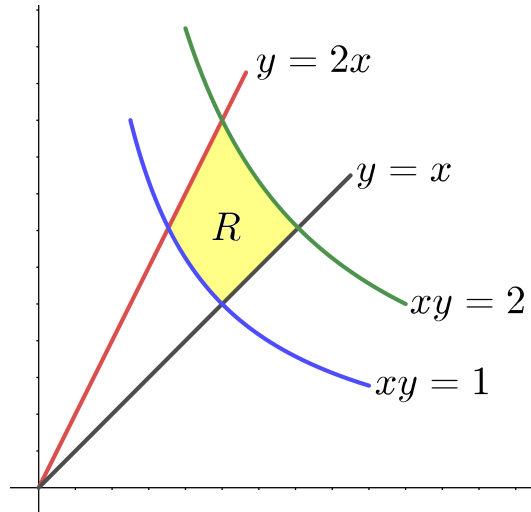


Figura 5.46: Región de integración  $R$

Así, el volumen del sólido, denotado por  $Q$ , está dado por la integral doble

$$V_Q = \iint_R (x + y - 0) dA = \iint_R (x + y) dA.$$

Considerando el cambio de variable dado y al analizar las fronteras de  $R$ , se tiene que:

- Si  $xy = 1$ , entonces  $u = 1$ .
- Si  $xy = 2$ , entonces  $u = 2$ .
- Si  $y = x \Rightarrow \frac{y}{x} = 1$ , entonces  $v = 1$ .
- Si  $y = 2x \Rightarrow \frac{y}{x} = 2$ , entonces  $v = 2$ .

Es claro que la nueva región  $R'$  corresponde a un cuadrado en el plano  $uv$ , esto es  $R' = [1, 2] \times [1, 2]$ . Luego, el determinante del Jacobiano se calcula de la siguiente forma.

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v,$$

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

por tanto  $|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|} = \frac{1}{2v}$ . Luego, note que para hallar  $V_Q$  se necesita despejar  $x$  e  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ , obteniendo

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \text{ y } y = \sqrt{uv}.$$

De esta forma, el volumen buscado viene dado por

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R (x + y) dA \\ &= \iint_{R'} \left( \sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) \frac{1}{2v} dA' \\ &= \frac{1}{2} \iint_{R'} \left( \frac{1}{v^{3/2}} + \frac{1}{v^{1/2}} \right) u^{1/2} dA' \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \left( \frac{1}{v^{3/2}} + \frac{1}{v^{1/2}} \right) u^{1/2} dudv \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**Observación 5.7** En el ejemplo 5.32, para escribir y calcular la integral doble que determina el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = x + y$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $z = 0$ , con  $x > 0$  y  $y > 0$ , **sin el cambio de variable sugerido**, se necesita primero hacer un dibujo más detallado del dominio de integración  $R$ , mostrando las intersecciones de las gráficas en el plano  $xy$ . Este dibujo, visto como región de tipo 1, se muestra en la figura 5.47.

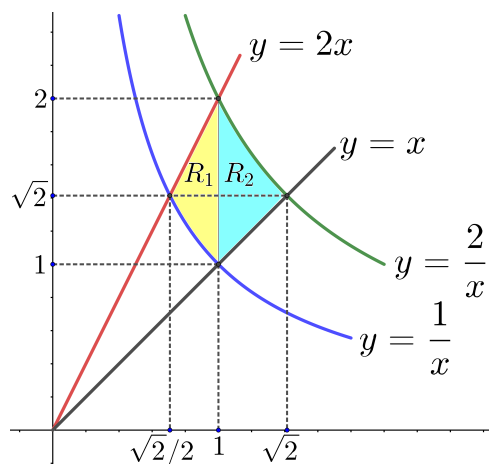


Figura 5.47: Región de integración  $R$  vista como tipo 1

Con este dibujo, es claro que la región  $R$  es la unión de dos subregiones, es decir,  $R = R_1 \cup R_2$ , donde

$$R = \begin{cases} R_1 & = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2x \right\} \\ R_2 & = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x \leq y \leq \frac{2}{x} \right\} \end{cases}.$$

Con esta información, la integral que calcula el volumen del sólido  $Q$  es

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R (x + y) \, dA \\ &= \iint_{R_1} (x + y) \, dydx + \iint_{R_2} (x + y) \, dydx \\ &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \int_{1/x}^{2x} (x + y) \, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{2/x} (x + y) \, dydx \\ &= \left( \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{3}, \text{ resultado que coincide con el ejemplo anterior.} \end{aligned}$$

#### 5.1.4.1. Coordenadas polares

Un caso muy usado en la práctica es el paso de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, descrito por el cambio de variables

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}, \text{ donde } r > 0 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Es claro que  $x^2 + y^2 = r^2$ . Además, el determinante del Jacobiano viene dado por

$$|J(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, drd\theta.$$

**Ejemplo 5.33** Use una integral doble y coordenadas polares para mostrar que el área de un círculo de radio  $a$  es  $A = \pi a^2$ .

**Solución:** Note que corresponde al mismo ejemplo 5.16, la diferencia radica en que en este caso solicitan el uso de coordenadas polares. 5.48.

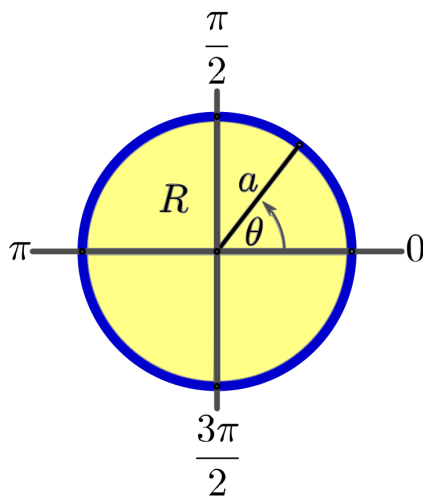


Figura 5.48: Región de integración  $R$  en coordenadas polares

Según la figura 5.48, y usando coordenadas polares, se tiene que  $0 \leq r \leq a$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , así la integral doble que permite calcular el área de la región circular es

$$\begin{aligned}
 A_R &= \int_0^{2\pi} \int_0^a 1 \cdot r \, dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=a} d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \left. \frac{a^2}{2} \cdot \theta \right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
 &= \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi \\
 &= \pi a^2.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.34** Usando una integral doble en coordenadas polares, halle el área de la región limitada por el círculo  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ .

**Solución:** La región  $R$  limitada por el círculo  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ , ( $a > 0$ ), se muestra en la figura 5.49.

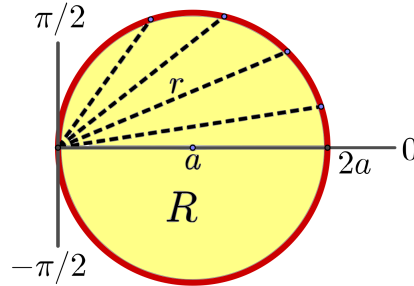


Figura 5.49: Región de integración  $R$

Según la figura 5.49 anterior, se tiene que  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , pero el radio  $r$  no se mantiene constante, pues está variando. De hecho, su máximo valor es  $r = 2a$ , que ocurre cuando  $\theta = 0$ . Puesto que  $r$  depende de la circunferencia  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ , este se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + y^2 = a^2 &\Rightarrow x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = a^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xa = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \\ &\Rightarrow r(r - 2a \cos \theta) = 0 \\ &\Rightarrow r = 0 \text{ o } r = 2a \cos \theta. \end{aligned}$$

Así se tiene que  $0 \leq r \leq 2a \cos \theta$ . Con ello, la integral doble en coordenadas polares que determina el área de la región circular  $R$  es

$$\begin{aligned} A_R &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} 1 \cdot r \, dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=2a \cos \theta} d\theta \\ &= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\ &= a^2 \cdot \left( \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \\ &= a^2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.35**

Considere la integral  $I = \iint_R e^{-x^2-y^2} dA$ .

1. Determine el valor de la integral  $I$  si  $R$  es el disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .
2. Determine el valor de la integral  $I$  si  $R = \mathbb{R}^2$ . **Sugerencia:** en la parte 1 anterior de este ejemplo haga  $a \rightarrow \infty$ .

**Solución:**

1. Dado la región  $R$  es el disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , se van a usar coordenadas polares. Note que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq r \leq a$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R e^{-x^2-y^2} dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r e^{-r^2} dr d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} (e^{-a^2} - 1) \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \pi(1 - e^{-a^2}).
 \end{aligned}$$

2. Usando la sugerencia se tiene que

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dA \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-a^2}) \\
 &= \pi \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{a^2}}\right) \\
 &= \pi \cdot (1 - 0) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.36** Plantee la integral  $I = \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$ , usando un cambio a coordenadas polares.

**Solución:** Primero se va realizar un dibujo de la región de integración  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ , el cual se muestra en la figura 5.50.

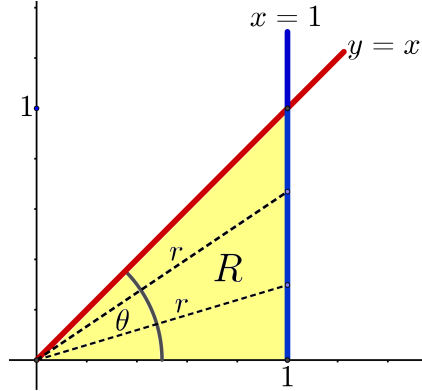


Figura 5.50: Región de integración  $R$

En coordenadas polares es claro que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Por otro lado, según la figura 5.50, el radio depende de la recta  $x = 1$ , entonces

$$r \cos \theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta.$$

Así se tiene que  $0 \leq r \leq \sec \theta$  y la integral  $I$  en coordenadas polares se plantea como

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} (r^2)^{\frac{3}{2}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} r^4 dr d\theta. \end{aligned}$$

Recuerde que únicamente se debía plantear la integral  $I$  utilizando coordenadas polares, su cálculo no es necesario, sin embargo, si se desea determinar el valor de  $I$ , esta quedaría como  $\frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \sec^5 \theta d\theta$ , cuyo cálculo se hace primero obteniendo  $\int \sec \theta d\theta$  por partes y luego, también por partes, se halla  $\int \sec^5 \theta d\theta$ . Al final, una aproximación numérica es  $I \approx 0,31359$ .

**Ejemplo 5.37** Dibuje en el plano  $xy$  el dominio de integración de

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2 \cos \theta}^1 f(r, \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{-2 \cos \theta}^1 f(r, \theta) r dr d\theta.$$



**Solución:** Se va pasar la integral  $I$  a coordenadas rectangulares, siendo  $I = I_1 + I_2$ , donde

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^1 f(r, \theta) r \, dr d\theta \quad \text{y} \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{-2\cos\theta}^1 f(r, \theta) r \, dr d\theta.$$

Para  $I_1$ , note que  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $2\cos\theta \leq r \leq 1$ , entonces:

- Si  $r = 2\cos\theta$  se obtiene  $x^2 + y^2 = 2x$ , es decir, el círculo  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , centrado en  $(1,0)$  y de radio 1.
- Si  $r = 1$  se obtiene  $x^2 + y^2 = 1$ , que corresponde a un círculo centrado en el origen y de radio 1.

Observe que la intersección de los dos círculos anteriores ocurre cuando  $x = \frac{1}{2}$ . Ahora, para  $I_2$ , note que  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$  y  $-2\cos\theta \leq r \leq 1$ , entonces:

- Si  $r = -2\cos\theta$  se obtiene  $x^2 + y^2 = -2x$ , es decir, el círculo  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ , centrado en  $(-1,0)$  y de radio 1.
- Si  $r = 1$  se obtiene  $x^2 + y^2 = 1$ , que es el círculo centrado en el origen y de radio 1.

La intersección de los dos círculos anteriores ocurre cuando  $x = -\frac{1}{2}$ . En relación con toda la información anterior, el dominio de integración se procede a dibujar, la cual se aprecia en la figura 5.51.

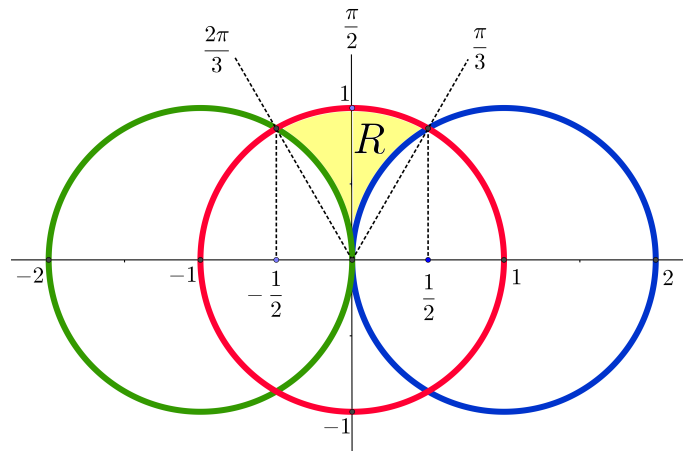


Figura 5.51: Dominio de integración  $R$

**Ejemplo 5.38** Se define la región  $R$  en el plano  $xy$  por  $r \leq \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , con  $r$  y  $\theta$  las coordenadas polares. Calcule la integral  $I = \iint_R \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}(\pi - \sqrt{x^2 + y^2})} dA$  replanteando la integral en el orden  $d\theta dr$ .

**Solución:** Sea  $R'$  la región en el plano  $\theta r$  descrita por  $R' = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq \theta\}$ , mostrada en la figura 5.52.

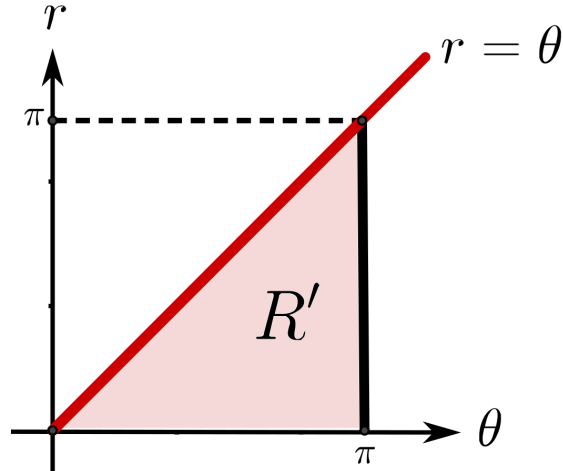


Figura 5.52: Región de integración  $R'$

Si se desea integrar en el orden  $d\theta dr$ , note que la región de integración mostrada en la figura anterior se puede escribir como  $R' = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 : r \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq \pi\}$ , así

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi \int_r^\pi \frac{\cos \sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2}(\pi - \sqrt{r^2})} r d\theta dr \\
 &= \int_0^\pi \int_r^\pi \frac{\cos r}{\pi - r} d\theta dr \\
 &= \int_0^\pi \frac{\cos r}{\pi - r} (\pi - r) dr \\
 &= \int_0^\pi \cos r dr = 0.
 \end{aligned}$$

**Observación 5.8** No es parte del ejemplo 5.38 anterior, pero note que la región  $R$  de integración en el plano  $xy$  dado por  $r \leq \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  es

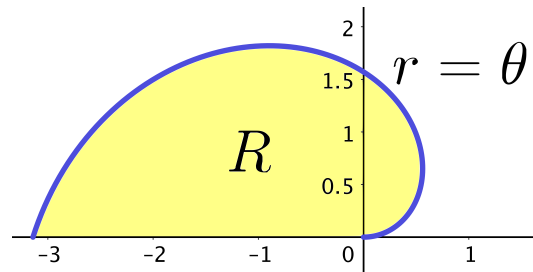


Figura 5.53: Región de integración  $R$

**Ejemplo 5.39** Considere las superficies  $z = r^2$  y  $z = 8 - r^2$ .

1. Identifique ambas superficies, transformándolas a coordenadas rectangulares y dibujándolas en un mismo sistema.
2. Sea  $Q$  el sólido limitado arriba por  $z = r^2$  y abajo por  $z = 8 - r^2$ . Determine el volumen de  $Q$ .

**Solución:**

1. Es claro que si  $z = r^2$  entonces  $z = x^2 + y^2$ , el cual corresponde a un paraboloide cóncavo hacia arriba, con vértice en el origen. De forma similar, si  $z = 8 - r^2$  se obtiene  $z = 8 - (x^2 + y^2)$ , el cual corresponde a un paraboloide cóncavo hacia abajo, con vértice en  $(0, 0, 8)$ . El dibujo de ambas superficies y el sólido  $Q$  limitado por éstas se aprecia en la figura 5.54.

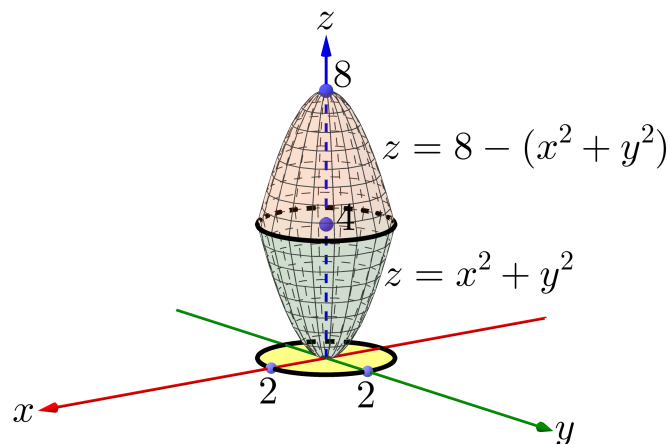


Figura 5.54: Superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 8 - (x^2 + y^2)$

2. Observe que la proyección del sólido  $Q$  en el plano  $xy$  es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ , así la integral doble que determina el volumen de  $Q$  es

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [(8 - r^2 - r^2)]r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - 2r^3) \, dr d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.40** Usando coordenadas polares, halle el volumen del sólido  $Q$  que está limitado por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 9$ .

**Solución:** Primero, un dibujo del sólido  $Q$  se encuentra en la figura 5.55. Note que dicho sólido  $Q$  proyecta la región circular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ , entonces, al usar coordenadas polares se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq r \leq 3$ , así

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_R (9 - (x^2 + y^2)) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)r \, dr d\theta \\ &= \frac{81}{2}\pi. \end{aligned}$$

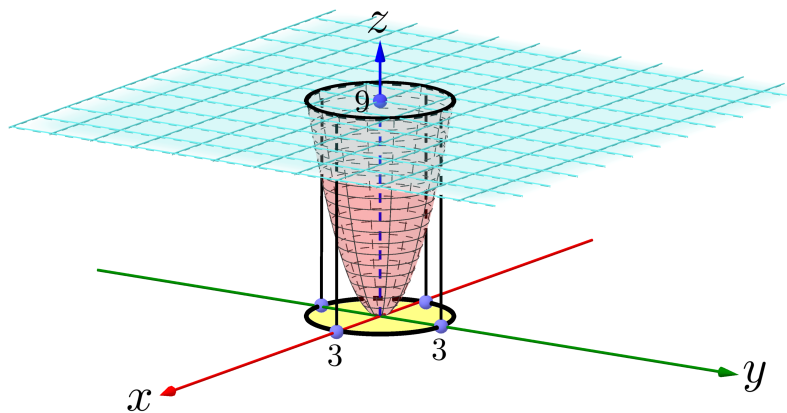


Figura 5.55: Cuerpo sólido  $Q$

**Ejemplo 5.41** Usando coordenadas polares, halle el volumen del sólido limitado por  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

**Solución:** Sea  $Q$  el sólido limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el cilindro  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .  
Un dibujo de este sólido se muestra en la figura 5.56.

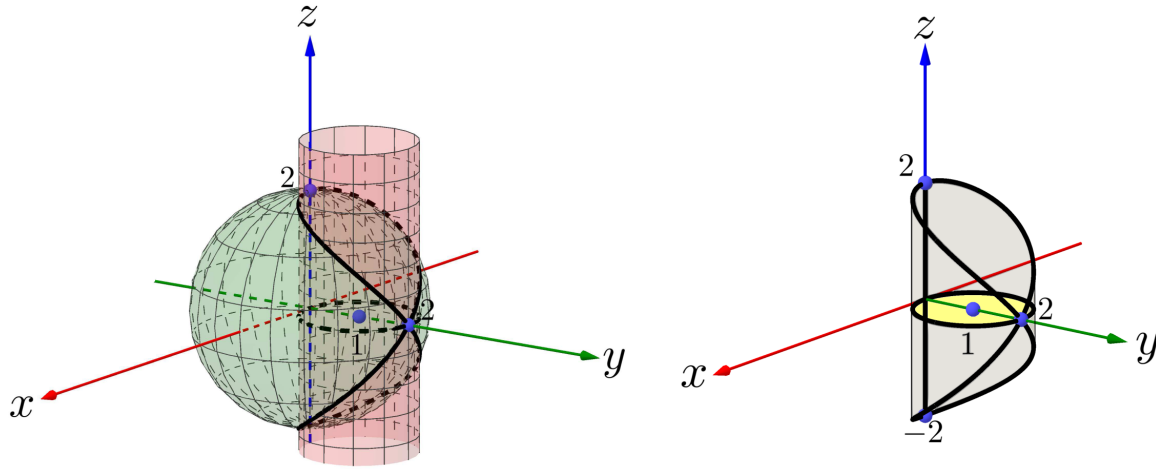


Figura 5.56: Cuerpo sólido  $Q$

Dada la simetría del cuerpo sólido, por simplicidad solo se va considerar una cuarta parte de éste, la que está en el primer octante. Luego, de la esfera se tiene que  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , entonces el volumen del sólido  $Q$  se calcula mediante la integral

$$V_Q = 4 \iint_R (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 0) \, dA,$$

donde  $R$  es la mitad ubicada en el primer octante de la región circular  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ , la cual se puede apreciar en la figura 5.57. Si se emplean coordenadas polares, se deduce que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

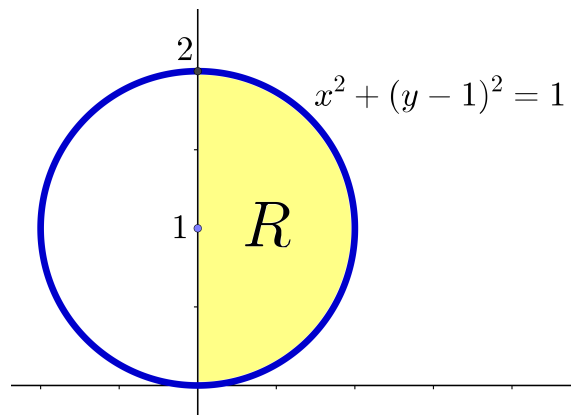


Figura 5.57: Región de integración  $R$

Además, dado que el radio  $r$  depende de la circunferencia  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta = 0 \\ &\Rightarrow r(r - 2 \operatorname{sen} \theta) = 0 \\ &\Rightarrow r = 0 \text{ o } r = 2 \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

De esta forma se tendría que

$$\begin{aligned} V_Q &= 4 \iint_R (\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 0) dA \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r \sqrt{4 - r^2} dr d\theta \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (4 - r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{32}{3} \left[ \int_0^{\pi/2} 1 d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{32}{3} \left[ \int_0^{\pi/2} 1 d\theta - \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \cos \theta d\theta \right] \\ &= \frac{32}{3} \left[ \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} - \left( \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \right] \\ &= \frac{16}{9} (3\pi - 4). \end{aligned}$$

### 5.1.4.2. Coordenadas polares generalizadas

Consiste en una generalización de las coordenadas polares, por lo que el determinante del Jacobiano puede variar según el cambio que se halla hecho a las coordenadas polares. Para comprender mejor esto, observe los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5.42** Sea  $a > b > 0$ , calcule  $I = \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dA$ , donde  $R$  es la región limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . **Sugerencia:** haga  $x = ar \cos \theta$  y  $y = br \operatorname{sen} \theta$ .

**Solución:** La idea de hacer el cambio de variables  $x = ar \cos \theta$  y  $y = br \sin \theta$  es deformar la región  $R$  limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en una nueva región  $R'$  que corresponde a un círculo de radio 1 centrado en el polo<sup>6</sup>. En efecto, observe que si

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{(ar \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(br \sin \theta)^2}{b^2} = 1 \\ &\Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 1 \\ &\Rightarrow r = 1. \end{aligned}$$

Además se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Para el determinante del Jacobiano, note que

$$|J(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

Con ello se tendría que la integral  $I$  se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \sqrt{1 - r^2} dr d\theta \\ &= \frac{2\pi ab}{3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.43** Usando coordenadas polares generalizadas, plantee una integral doble que determine el volumen del sólido  $Q$ , limitado por  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

**Solución:** Observe que es similar al ejemplo 5.41, la diferencia es que aquí solo se debe plantear la integral (no calcularla) en coordenadas polares generalizadas. Además, el volumen del sólido  $Q$  se calcula mediante la integral

$$V_Q = 2 \iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA,$$

donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ . En este caso, la integral que calcula  $V_Q$  está multiplicada por 2 ya que se considera la región  $R$  completa y no la mitad de esta,

---

<sup>6</sup>Recuerde que el polo es el origen en coordenadas polares.

como se hizo en el a resolución del ejemplo 5.41. De acuerdo con la región  $R$  y el hecho que se debe usar una generalización de las coordenadas polares, el cambio de variables que se utiliza es

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = 1 + r \sin \theta.$$

Entonces, la nueva región  $R'$  corresponde a un círculo de radio 1 centrado en el polo. Por otro lado, observe que  $|J(\theta, r)| = r$ . Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} V_Q &= 2 \iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{4 - (r \cos \theta)^2 - (1 + r \sin \theta)^2} \, dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{3 - r^2 - 2r \sin \theta} \, dr d\theta. \end{aligned}$$

Esta última integral no se debe calcular, pues el objetivo era solo plantearla. Es importante mencionar que su cálculo puede ser complicado. Usando herramientas informáticas se llega a concluir que un valor aproximado para  $V_Q$  es

$$V_Q \approx 9,644404\dots,$$

que coincide con el valor numérico de  $\frac{16}{9}(3\pi - 4)$ , resultado del ejemplo 5.41.

**Ejemplo 5.44** Considere el cambio de variables a coordenadas polares generalizadas dada por

$$x = ar \cos^\alpha \theta \quad \text{y} \quad y = br \sin^\alpha \theta.$$

1. Muestre que  $|J(r, \theta)| = ab\alpha r \sin^{\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta$ .
2. Use las coordenadas polares generalizadas  $x = ar \cos^2 \theta$  y  $y = br \sin^2 \theta$  para plantear una integral doble que calcule el área de la región  $R$  limitada por la curva  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$ , en el primer cuadrante, con  $a, b, h$  y  $k$  constantes positivas. Además, determine el área.



**Solución:**

1. Observe que

$$\begin{aligned}
 |J(r, \theta)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a \cos^\alpha \theta & -ar\alpha \cos^{\alpha-1} \theta \sin \theta \\ b \sin^\alpha \theta & br\alpha \sin^{\alpha-1} \theta \cos \theta \end{vmatrix} \\
 &= ab\alpha r \cos^{\alpha+1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta + ab\alpha r \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\alpha+1} \theta \\
 &= ab\alpha r \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= ab\alpha r \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta.
 \end{aligned}$$

2. Como es en el primer cuadrante se tiene que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Para el radio  $r$ , note que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} &\Rightarrow \left(\frac{ar \cos^2 \theta}{a} + \frac{br \sin^2 \theta}{b}\right)^4 = \frac{(ar \cos^2 \theta)^2}{h^2} + \frac{(br \sin^2 \theta)^2}{k^2} \\
 &\Rightarrow r^4 = \frac{a^2 r^2 \cos^4 \theta}{h^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^4 \theta}{k^2} \\
 &\Rightarrow r^2 = \frac{a^2 \cos^4 \theta}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \theta}{k^2} \\
 &\Rightarrow r = \left(\frac{a^2 \cos^4 \theta}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \theta}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ahora, según la parte uno de este ejemplo, se tiene que

$$|J(r, \theta)| = 2abr \cos \theta \sin \theta.$$

Con ello, la integral doble que calcula el área de la región  $R$  limitada por la curva  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$  es

$$A_R = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\left(\frac{a^2}{h^2} \cos^4 \theta + \frac{b^2}{k^2} \sin^4 \theta\right)^{\frac{1}{2}}} r \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

**Ejemplo 5.45** Aplique coordenadas polares generalizadas dadas por  $x = r \cos^2 \theta$  y  $y = r \sin^2 \theta$  para calcular la integral doble  $I = \iint_R \sqrt{1 - (x + y)^2} \, dA$ , donde la región de integración es  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ .

**Solución:** En coordenadas rectangulares la región  $R$  está dada en la figura 5.58.

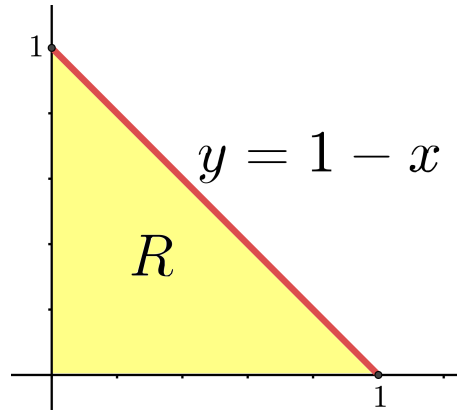


Figura 5.58: Región de integración  $R$  en coordenadas rectangulares

Ahora, note que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Para el radio  $r$ , observe que si  $y = 1 - x$ , entonces  $x + y = 1$ , es decir,  $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = 1$ , con lo cual  $r = 1$ , así se infiere que  $0 \leq r \leq 1$ . Para el determinante del Jacobiano use la parte 1 del ejemplo 5.44, tomando  $a = b = 1$  y  $\alpha = 2$ , con ello

$$|J(r, \theta)| = 2r \cos \theta \sin \theta.$$

En relación con la información anterior, la integral  $I$  quedaría como

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \sqrt{1 - (x + y)^2} \, dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\sin \theta \cos \theta)(2r \sqrt{1 - r^2}) \, dr d\theta \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

## Ejercicios

**Ejercicio 154** Calcule la integral doble de la función  $f(x, y)$  sobre el rectángulo  $R$  indicado, en el supuesto que la integral exista.

1.  $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$  sobre el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .
2.  $f(x, y) = x \operatorname{sen} y - ye^x$  sobre el rectángulo  $R = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$ .

**Ejercicio 155** Calcule el valor de las siguientes integrales dobles:

1.  $\int_0^a \int_x^a \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
2.  $\int_0^8 \int_{y^{1/3}}^2 \frac{y^2 e^{x^2}}{x^8} dx dy$ .
3.  $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ .

**Ejercicio 156** Considere la integral  $I = \int_{-12}^0 \int_{\sqrt{-y/3}}^2 \frac{1}{1+x^3} dx dy + \int_0^{12} \int_{\sqrt{y/3}}^2 \frac{1}{1+x^3} dx dy$ . Muestre que  $I = 2 \ln 9$ . **Sugerencia:** calcule  $I$  en el orden  $dydx$ .

**Ejercicio 157** Invierta su orden de integración de las siguientes integrales dobles.

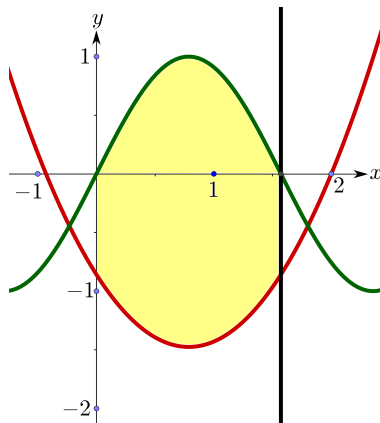
1.  $I = \int_0^2 \int_{2x-x^2}^{4x-x^2} f(x, y) dy dx$ .
2.  $I = \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y) dy dx$ .
3.  $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$ .
4.  $I = \int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy$ .
5.  $I = \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy dx$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 158** Calcule la integral doble  $I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{2a-x}} dA$ , donde  $R$  es el círculo de radio  $a$ , tangente a los ejes coordenados, en el primer cuadrante. **Sugerencia:** escriba la integral en el orden  $dydx$ .

**Ejercicio 159** Muestre que  $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{-x+3}{2}} f(x, y) dy dx = \ln \left( \frac{4}{3} \right)$ , siendo  $f(x, y) = \frac{1}{3y - y^2 - \frac{2}{3}y^{3/2} + 1}$ . **Sugerencia:** escriba la integral en el orden  $dx dy$ .

**Ejercicio 160** Muestre que  $I = \int_0^1 \int_0^{x^3} f(x, y) dy dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy dx = 1$ , siendo  $f(x, y) = \frac{1}{3 - 2y - \sqrt[3]{y}}$ . **Sugerencia:** escriba la integral en el orden  $dx dy$ .

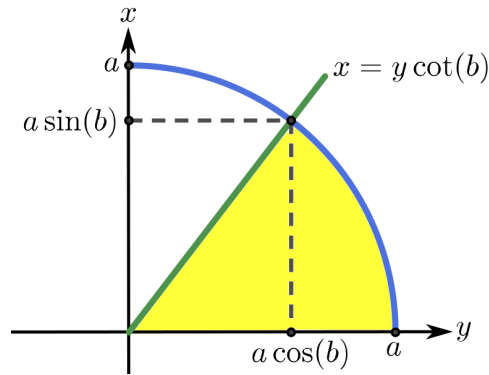
**Ejercicio 161** Considere la integral doble  $I = \iint_R f(x, y) dA$ , donde  $R$  es la región del plano  $xy$  acotada por abajo de  $y = \sin(2x)$  y por arriba de  $y = x^2 - \frac{\pi}{2}x + \pi - 4$ , y por las rectas  $x = 0$  y  $x = \frac{\pi}{2}$ , como lo muestra la figura siguiente. Escriba la integral  $I$  en el orden  $dx dy$ .



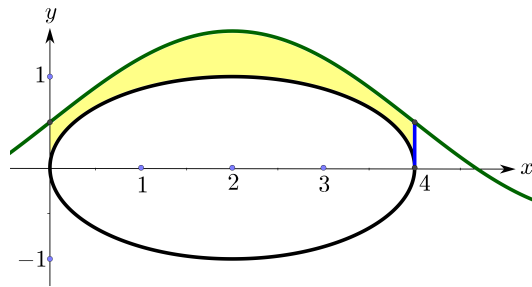
**Ejercicio 162** Considere la región  $R$  acotada por las curvas  $x^2 + y^2 = 9$  y  $y^2 - x^2 = 1$ . Escriba la integral doble, tanto en el orden de integración  $dx dy$  como el orden  $dy dx$ , que permita calcular el área de la región  $R$ .

**Ejercicio 163** Plantee, tanto en el orden de integración  $dy dx$  como  $dx dy$ , la integral doble que permita calcular el área de la región limitada por  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x + y = 4$  y  $y = 0$ .

**Ejercicio 164** Sean las constantes  $a > 0$  y  $0 < b < \frac{\pi}{2}$  y considere la región dada por  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a \sin(b), y \cot(b) \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$ , según se aprecia en la figura siguiente. Escriba una integral doble  $I$  que permita calcular el área de  $R$ , tanto en el orden  $dx dy$  y como en el orden  $dy dx$ .



**Ejercicio 165** En la siguiente gráfica aparecen graficadas las curvas que corresponden a las funciones  $y = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$  y  $\frac{x^2}{4} - x + y^2 = 0$ . Plantee una integral doble en el orden  $dx dy$  que permita calcular el área bajo la primera curva y sobre la segunda, en el primer cuadrante, y ubicada entre las rectas  $x = 0$  y  $x = 4$ . **Sugerencia:** la región  $R$  en el orden  $dx dy$  se componen de un total de 5 subregiones.



**Ejercicio 166** Sea la integral

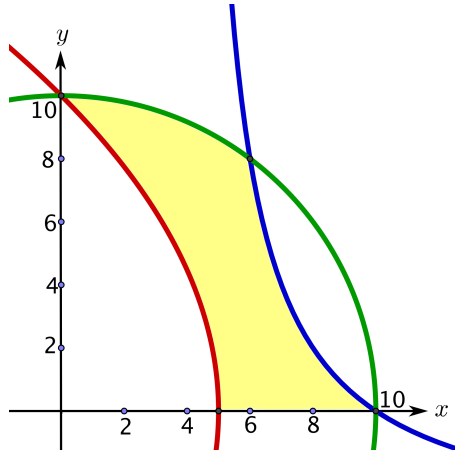
$$A_R = \iint_R 1 \, dA,$$

que calcula el área de una región  $R$  del primer cuadrante acotada por las curvas  $y = \sin(\pi x)$ ,  $y = 2 \sin(\pi x)$ ,  $x = \frac{1}{3}$  y  $x = \frac{3}{4}$ . Escriba  $A_R$  en el orden  $dx dy$ . **Sugerencia:** En total son 5 subregiones.

**Ejercicio 167** En la siguiente gráfica se muestra la región sombreada  $R$  acotada por las curvas

$$(x - 4)(y + 4) = 24, \quad 20x = 100 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 100.$$

Determine una integral doble en el orden  $dydx$  que permita calcular el área de  $R$ .



**Ejercicio 168** Use una integral doble para hallar el área de la región  $R$  encerrada por  $x \geq y^2 - 2y$  y  $x \leq 4 - y^2$ .

**Ejercicio 169** Mediante una integral doble en el orden  $dydx$  determine el volumen de la pirámide cuyos vértices son  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

**Ejercicio 170** Usando una integral doble en el orden  $dx dy$  calcule el volumen del sólido limitado por las superficies  $z = 5 - 2x^2$ , los planos coordenados y el plano  $2x + y = 1$ .

**Ejercicio 171** Transforme la integral  $I = \int_0^c \int_{ax}^{bx} f(x, y) dy dx$ , donde  $0 < a < b$  y  $c > 0$ , usando el cambio de variables  $u = x + y$ ,  $uv = y$ .

**Ejercicio 172** Considere la integral doble

$$I = \iint_R \left( \sqrt{x - 2y} + \frac{y^2}{4} \right) dA.$$

Si  $R$  es el interior del triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(4, 2)$ , calcule el valor de  $I$  usando el cambio de variables  $x = 4u + v$ ,  $y = 2u$ .

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

**Ejercicio 173** Sea  $R$  la región encerrada por las cuatro rectas  $y = -x + \frac{1}{2}$ ,  $y = -x + 1$ ,  $y = x - \frac{1}{2}$  y  $y = x - 1$ . Sea la integral

$$I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dA.$$

1. Escriba la integral doble  $I$  tanto en el orden  $dx dy$  como  $dy dx$ .
2. Calcule el valor de  $I$  usando el cambio de variables  $x = (u + 1)^2 + (v + 1)^2$  y  $y = (u + 1)^2 - (v + 1)^2$ , donde  $u > -1$  y  $v > -1$ .

**Ejercicio 174** Considere la integral  $I = \iint_R \frac{1 + e^x}{\sqrt{y - e^x}} dA$ , donde  $R$  es la región del plano dada por  $-x \leq y \leq 3 - x$ ,  $e^x + 1 \leq y \leq e^x + 2$ . Determine el valor de  $I$  usando el cambio de variables  $u = x + y$  y  $v = y - e^x$ .

**Ejercicio 175** Utilice el cambio de variables  $u = 5x - 3y$ ,  $v = x^2 + 5y$  para calcular la integral

$$I = \iint_R (6x + 25)\sqrt{x^2 + 5y + 1} dA,$$

donde  $R$  es la región en el primer cuadrante limitada por las curvas  $5y = -x^2 + 15$ ,  $5y = -x^2 + 40$ ,  $5x - 3y = 0$ ,  $5x - 3y = 15$ .

**Ejercicio 176** Considere la integral doble  $I = \iint_R (x^4 - y^4) dA$ , donde  $R$  es la región en el primer cuadrante limitada por las curvas  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 2$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ . Utilice el cambio de variables  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$  para determinar el valor de  $I$ .

**Ejercicio 177** Considere la integral  $I = \iint_R x \cos\left(\frac{y - x^2}{y + x^2}\right) dA$  con  $R$  la región del plano  $xy$ , ubicada en el primer octante, limitada por la parábola  $y = 1 - x^2$  y las rectas  $x = 0$  y  $y = 0$ . Determine el valor de  $I$  usando el cambio de variables

$$x = \sqrt{\frac{v - u}{2}} \quad \text{y} \quad y = \frac{u + v}{2}.$$

**Ejercicio 178** Determine el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  mediante una integral doble y aplicando el cambio de variables  $u = ax$  y  $v = by$ .

**Ejercicio 179** Calcule el valor de la integral  $I = \iint_R \frac{(x + y)e^{(x+y)^2(x-y)^2}}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}} dA$  donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$ . **Sugerencia:** use el cambio de variables  $u = x + y$  y  $v = x - y$  y el resultado del ejercicio 182.

**Ejercicio 180** Escriba las siguientes integrales en coordenadas polares.

1.  $\int_0^a \int_0^a f(x, y) dydx.$
2.  $\int_0^a \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dydx.$
3.  $\iint_R f(x, y) dA$ , donde  $R$  es la región triangular limitado por las rectas  $y = x$ ,  $y = -x$  y  $y = 1$ .
4.  $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dydx.$
5.  $\iint_R f(x^2 + y^2) dA$ , donde  $R$  es el anillo circular  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ .

**Ejercicio 181** Utilice coordenadas polares para calcular la integral doble

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dydx$$

**Ejercicio 182** Utilice coordenadas polares para mostrar que  $I = \iint_R \frac{xe^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dA = 0$ , donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$ .

**Ejercicio 183** Considere la integral

$$I = \iint_R \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dA,$$

donde  $R$  está limitada por las curvas  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  y las rectas  $y = x$  y  $x = 0$ . Use coordenadas polares para calcular  $I$ .

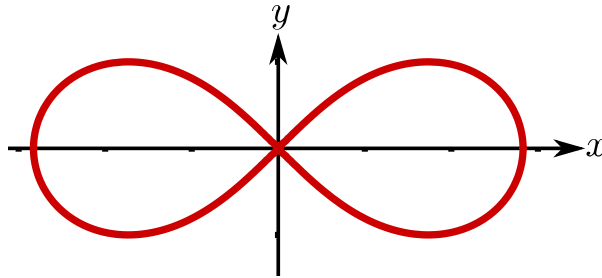
**Ejercicio 184** Use coordenadas polares para verificar que

$$I = \iint_R \frac{(x+y)e^{2x^2+2y^2}}{\sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2}} dA = 0,$$

siendo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$ .



**Ejercicio 185** Considere la curva  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ , llamada **lemniscata de Bernoulli**, mostrada en la figura siguiente.



Use una integral doble en coordenadas polares para determinar el área que encierra esta curva.  
**Sugerencia:** note que la lemniscata de Bernoulli es simétrica en relación con los ejes coordenados.

**Ejercicio 186** Use una integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región limitada por la curva  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 0$ .

**Ejercicio 187** Calcule el área de la región comprendida entre los círculos  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = by$ , con  $a$  y  $b$  constantes positivas.

**Ejercicio 188** Calcule el área de la región comprendida entre las elipses  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ,  $a > b > 0$ .

**Ejercicio 189** Considere el sólido  $Q$  que se encuentra dentro del paraboloide  $z = 1 - x^2 - y^2$ , por encima del plano  $z = 0$  y exterior al cilindro  $x^2 - x + y^2 = 0$ .

1. Escriba una integral doble en coordenadas rectangulares que permita calcular el volumen del sólido  $Q$ .
2. Calcule el volumen de  $Q$  mediante una integral doble en coordenadas polares.  
**Sugerencia:** Para su cálculo, puede ayudar la igualdad de Wallis, mostrada en la observación 6.22 de la página 389.

**Ejercicio 190** Use una integral doble en coordenadas polares para determinar el volumen del:

1. Sólido encerrado por las superficies  $\frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{16} + z = 12$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  con  $z \geq 0$ , cuando  $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$ .
2. Sólido acotado por las superficies  $x^2 + y^2 + z = 21$  y  $x^2 + y^2 - z = -3$ .

3. Sólido acotado por el interior de las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ .

**Ejercicio 191** Usando integrales dobles en coordenadas polares, determine el volumen del “cono de helado”, limitado superiormente por la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ , e inferiormente por el semicono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0$ .

**Ejercicio 192** Use coordenadas polares generalizadas para transformar las siguientes integrales dobles.

- $\iint_R f(x, y) dA$ , donde  $R$  está limitada por la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
- $\iint_R f(x, y) dA$ , donde  $R$  está limitada por la curva  $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$ .
- $\iint_R \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dA$ , donde  $R$  está limitada por las elipses  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y  $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ , en el primer cuadrante.
- $\iint_R xy dA$ , donde  $R$  está limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , en el primer cuadrante.
- $\iint_R \sqrt{xy} dA$ , donde  $R$  está limitada por la curva  $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ , en el primer cuadrante.

Para los siguientes ejercicios debe aplicar la teoría escrita a continuación: suponga que una lámina se puede representar mediante una región plana  $R$ , y que la densidad de dicha lámina en un punto  $(x, y)$  está dada por la función continua  $z = f(x, y)$  (llamada función densidad), se define:

- La masa total  $M$  de la lámina  $R$  como  $M = \iint_R f(x, y) dA$ .
- Los momentos de la lámina  $R$  respecto al eje  $x$  y al eje  $y$  como las integrales dobles  $M_x = \iint_R yf(x, y) dA$  y  $M_y = \iint_R xf(x, y) dA$ , de forma respectiva.
- El centro de masa (o centro de gravedad) de la lámina  $R$  como las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , donde  $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$  y  $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ . Si la función densidad  $z = f(x, y)$  de la lámina  $R$  es constante, el centro de masa recibe el nombre de centroide. Es importante mencionar que el centro de masa de una lámina plana es el punto donde el balanceo de la lámina está en perfecto equilibrio.
- El momento de inercia (también llamado segundo momento) de la lámina  $R$  respecto al eje  $x$  y al eje  $y$  como  $I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dA$  y  $I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dA$ , de forma respectiva.

## 5.1. Integrales en $\mathbb{R}^2$

5. El momento polar de inercia de la lámina  $R$  como  $I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)f(x, y) dA$ .  
Es claro que  $I_0 = I_x + I_y$ .

**Ejercicio 193** Sea  $R$  una lámina triangular con vértices en  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$ , de modo que su densidad en cualquier punto  $(x, y)$  es  $f(x, y) = xy$ . Halle su masa total.

**Ejercicio 194** Determine la masa de la lámina plana limitada por las curvas  $x = y^2 - 1$  y  $x = 2(y^2 - 1)$ , cuya densidad es igual a la unidad.

**Ejercicio 195** Halle la masa de la lámina plana suponiendo que se encuentra acotada por las curvas  $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$  y  $y = 2|x - 2|$ , cuya densidad varía de acuerdo con la función  $f(x, y) = 1 + 2x$ . Luego determine su centro de masa.

**Ejercicio 196** Determine el centro de masa de una lámina triangular  $R$  con vértices en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 2)$ , si la función densidad es  $f(x, y) = 1 + 3x + y$ .

**Ejercicio 197** Sea  $R$  una lámina limitada por la parábola  $x = y^2$  y la recta  $y = x - 2$ . Halle su masa total y su centroide suponiendo que la función densidad es  $f(x, y) = 3$ .

**Ejercicio 198** Una lámina ocupa la región limitada por la recta  $y = x + 2$  y la parábola  $y = x^2$ . Si  $f(x, y) = kx^2$ ,  $k$  constante y positivo, encuentre la masa y el centroide de esta lámina.

**Ejercicio 199** Suponga que una lámina  $R$  ocupa la región limitada por  $y = b \left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)$  en el primer cuadrante. Encuentre el centroide de esta lámina.

**Ejercicio 200** Calcular la posición del centro de masas de la lámina  $R$  ubicada en el primer cuadrante, y limitada por las curvas  $y = \frac{b}{a}x$  y  $y = \frac{b}{a^2}x^2$ , suponiendo que su masa está uniformemente distribuida, es decir, la función densidad es constante.

**Ejercicio 201** Halle el centroide (para cada uno debe suponer que la función densidad es  $f(x, y) = k$ ,  $k$  es una constante) de las láminas representadas por las siguientes regiones:

1. Un triángulo isósceles de base  $b$  y altura  $h$ .
2. Figura acotada por  $y = x^2$  y  $y = 5x - 6$ .
3. Figura acotada por  $y = x^2 - x^4$  con  $x \geq 0$ .

**Ejercicio 202** Suponga que la función densidad en cualquier punto sobre una lámina semicircular de radio  $a$  es proporcional a la distancia del punto al centro del círculo. Encuentre el centro de masa de la lámina. **Sugerencia:** observe que la función densidad tiene la forma  $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ , donde  $k$  es una constante.

**Ejercicio 203** Una lámina ocupa la parte del disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  en el primer cuadrante. Halle su centro de masa, si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje  $x$ .

**Ejercicio 204** Una lámina tiene la forma de la región  $R$  del plano  $xy$  acotado por las gráficas  $x = y^2$  y  $x = 4$ . Suponga que la densidad en el punto  $(x, y)$  es directamente proporcional a la distancia del eje  $y$ . Calcule la masa de la lámina.

**Ejercicio 205** Considere la lámina  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ . Halle el momento de inercia respecto al eje  $x$  suponiendo que la función densidad es constante.

**Ejercicio 206** Determine los momentos de inercia  $I_x$ ,  $I_y$  y  $I_0$  de una lámina circular de radio  $a$  y centro en el origen, suponiendo que la densidad en todo punto de la lámina es constante.

**Ejercicio 207** Una lámina  $R$  con densidad constante ocupa un cuadrado con vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, a)$  y  $(0, a)$ . Halle los momentos de inercia  $I_x$  y  $I_y$ .

**Ejercicio 208** Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $x$  de la lámina plana  $R$  situada en el primer cuadrante, acotada por las curvas  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^2 = 3y$ , si la densidad en cada punto de la región es  $f(x, y) = x^3y$ . **Sugerencia:** use un cambio de variable adecuado para calcular la integral doble.

**Ejercicio 209** Una lámina delgada con densidad constante  $c$  está limitada por dos circunferencias concéntricas de radios  $a$  y  $b$  y centro en el origen, siendo  $0 < b < a$ . Calcule la masa total y el momento polar de inercia.

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

### 5.2.1. Integrales triples sobre paralelepípedos rectangulares cerrados

**Definición 5.6** (Paralelepípedos rectangulares cerrados en  $\mathbb{R}^3$ ) En  $\mathbb{R}^3$  se define un paralelepípedo rectangular cerrado como el producto cartesiano de tres intervalos cerrados de  $\mathbb{R}$ . La región que acota ese paralelepípedo rectangular cerrado se denota con  $Q$ , es decir,

$$Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\},$$

y se llamará caja rectangular cerrada en el espacio, o simplemente, caja rectangular, como lo muestra la figura 5.59.

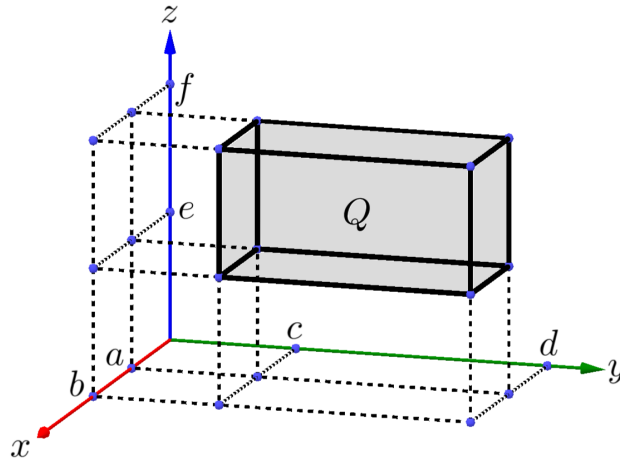


Figura 5.59: Caja rectangular

**Definición 5.7** (Integral triple sobre cajas rectangulares) Sea  $Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  una caja rectangular y sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $Q$ , la expresión

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

se llama integral triple sobre la caja rectangular  $Q$ , y se calcula haciendo

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_e^f \left( \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

De forma análoga se define la integral triple para los órdenes  $dx dz dy$ ,  $dy dx dz$ ,  $dy dz dx$ ,  $dz dx dy$  y  $dz dy dx$ . En particular

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_c^d \left( \int_a^b \int_e^f f(x, y, z) dz dx \right) dy.$$

**Observación 5.9** Por comodidad de notación, en vez de escribir

$$\int_e^f \left( \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

se escribe

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz,$$

la cual se llama integral triple iterada en el orden  $dx dy dz$ . Esta notación se utiliza para los demás cinco órdenes de integración.

**Teorema 5.5 (Teorema de Fubini)** Sea  $Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  una caja rectangular y sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $Q$ , entonces

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q f(x, y, z) dV \\ &= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz = \int_c^d \int_e^f \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x, y, z) dz dx dy = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$

Es decir, el valor de la integral triple  $I$  es el mismo para cualquier orden de integración.

**Ejemplo 5.46** Determine el valor numérico de  $I = \iiint_Q x^2 y z dV$  donde la caja rectangular es  $Q = [-1, 1] \times [0, 1] \times [2, 5]$ .

**Solución:** Por el teorema 5.5 se puede usar cualquier orden de integración, en particular se va usar el orden  $dzdydx$ . Así,

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_Q x^2 y z \, dV \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_2^5 x^2 y z \, dz dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{21}{2} x^2 y \, dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{21}{4} x^2 \, dx \\
 &= \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

### 5.2.2. Integrales triples sobre sólidos más generales

**Definición 5.8** (Integral triple sobre un sólido de tipo 1) Un sólido  $Q$  se denomina **sólido de tipo 1** si  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$ , como lo muestra la figura 5.60.

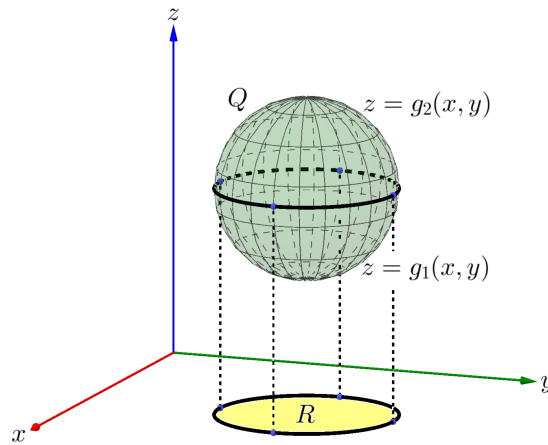


Figura 5.60: Sólido de tipo 1

Además, sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $Q$ , la integral de  $f$  sobre  $Q$  se puede calcular como

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \iint_R \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz dA.$$

En este caso para el  $dA$  y según la región  $R$  sobre el plano  $xy$ , se puede cambiar por  $dx dy$  o bien  $dy dx$ . A la región  $R$  se le suele llamar proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$  y se puede escribir  $R_{xy}$ .

**Definición 5.9 (Integral triple sobre un sólido de tipo 2)** Un sólido  $Q$  se denomina **sólido de tipo 2** si  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in R, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$ , como lo muestra la figura 5.61.

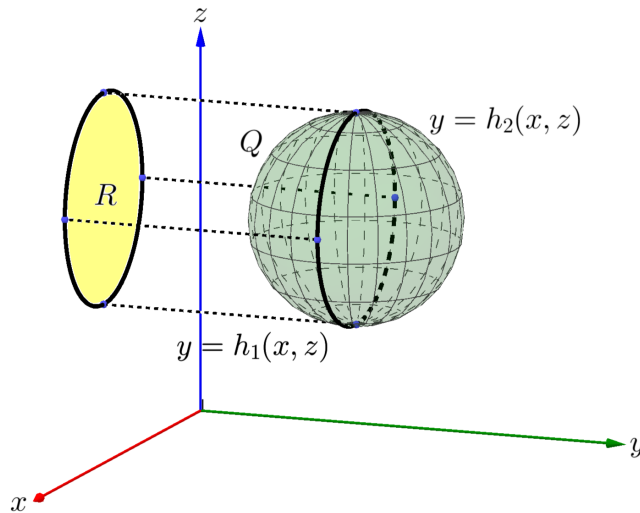


Figura 5.61: Sólido de tipo 2

Además, sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $Q$ , la integral de  $f$  sobre  $Q$  se puede calcular como

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_R \int_{h_1(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) dy dA.$$

En este caso para el  $dA$  y según la región  $R$  sobre el plano  $xz$ , se puede cambiar por  $dx dz$  o bien  $dz dx$ . A la región  $R$  se le suele llamar proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xz$  y se puede escribir  $R_{xz}$ .

**Definición 5.10 (Integral triple sobre un sólido de tipo 3)** Un sólido  $Q$  se denomina **sólido de tipo 3** si  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in R, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)\}$ , como lo muestra la figura 5.62.



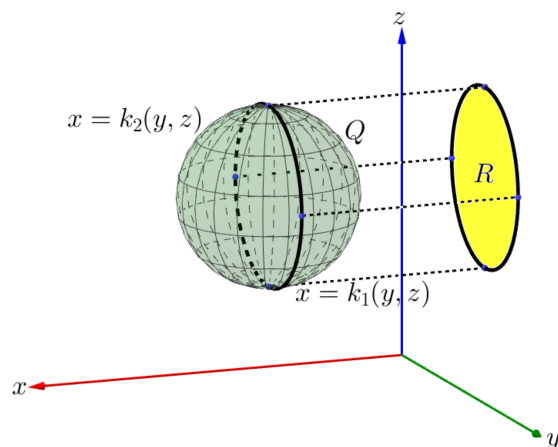


Figura 5.62: Sólido de tipo 3

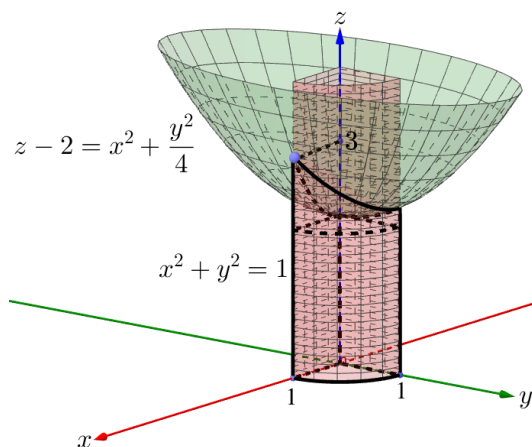
Además, sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada sobre  $Q$ , la integral de  $f$  sobre  $Q$  se puede calcular como

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_R \int_{k_1(y, z)}^{k_2(y, z)} f(x, y, z) dx dA.$$

En este caso para el  $dA$  y según la región  $R$  sobre el plano  $yz$ , se puede cambiar por  $dydz$  o bien  $dzdy$ . A la región  $R$  se le suele llamar proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $yz$  y se puede escribir  $R_{yz}$ .

**Ejemplo 5.47** Expresar  $I = \iiint_Q f(x, y, z) dV$  como una integral iterada en el orden  $dzdydx$ , para el sólido  $Q$  en el primer octante, acotado por los planos coordenados y las superficies  $z - 2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$  y  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solución:** Primero observe que un dibujo del sólido  $Q$  se muestra en las figuras 5.63.

Figura 5.63: Sólido  $Q$

Luego, en el orden  $dzdydx$  (sólido de tipo 1) la proyección  $R$  del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$  está dada por la cuarta parte del círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , es decir,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$  como lo muestra la figura 5.64.

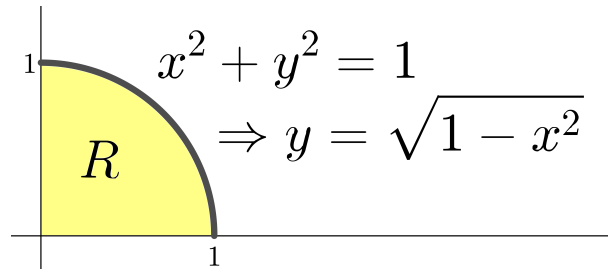


Figura 5.64: Proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$

Además, observe que  $Q$  está acotado inferiormente por el plano  $z = 0$  y superiormente por el paraboloides  $z = x^2 + \frac{y^2}{4} + 2$ , es decir,  $0 \leq z \leq x^2 + \frac{y^2}{4} + 2$ , con ello se tiene que

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2 + \frac{y^2}{4} + 2} f(x, y, z) dz dy dx.$$

**Ejemplo 5.48** Considere la integral  $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx$ . Escriba  $I$  en el orden  $dydx dz$ .

**Solución:** Note que el sólido  $Q$  corresponde al cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , con  $0 \leq z \leq 1$ . Un dibujo de este sólido y su proyección en el plano  $xz$  se aprecian en la figura 5.65.

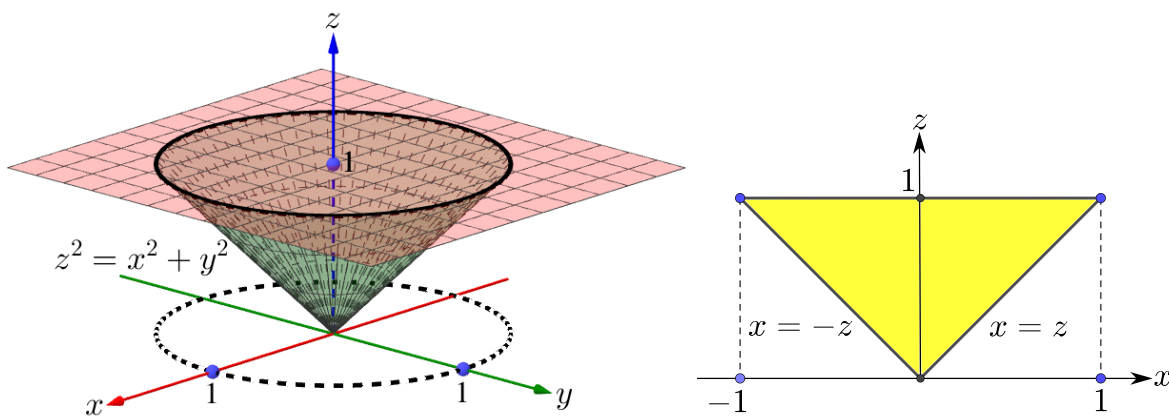


Figura 5.65: Sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $xz$

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

Ahora, para escribir  $I$  en el orden  $dydx dz$  (sólido de tipo 2), y de acuerdo con la figura 5.65, se aprecia que  $0 \leq z \leq 1$ ,  $-z \leq x \leq z$  y  $\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq -\sqrt{z^2 - x^2}$ , con ello

$$I = \int_0^1 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy dx dz$$

**Ejemplo 5.49** Cambie el orden de integración de

$$I = \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2x}{3}} \int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x, y, z) dz dy dx,$$

a una integral con el orden  $dydx dz$ .

**Solución:** A partir de la integral triple  $I$  se deduce que el sólido  $Q$  está limitado por los planos coordenados en el primero octante y además que está acotado superiormente por el plano  $z = 3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}$ , es decir, corresponde a un tetraedro (ver figura 5.66). Para cambiar  $I$  al orden

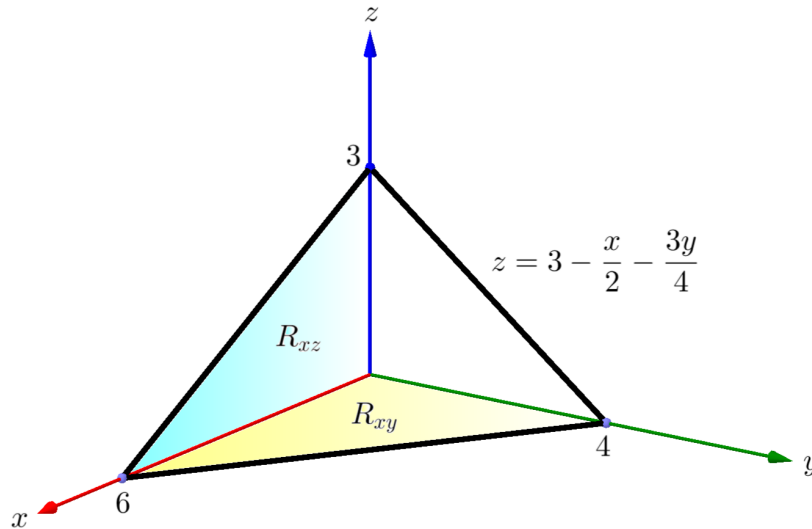


Figura 5.66: Tetraedro  $Q$  con sus proyecciones en en plano  $xy$  y  $xz$

$dydx dz$ , note que la proyección sobre el plano  $xz$  corresponde al triángulo mostrado en la figura 5.67.

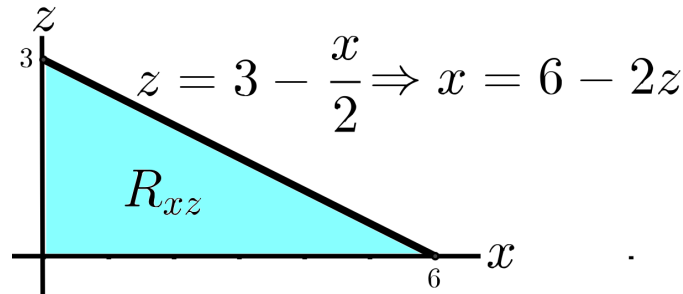


Figura 5.67: Proyección de  $Q$  sobre el plano  $xz$

También note que el sólido  $Q$  está acotado desde  $y = 0$  hasta  $y = 4 - \frac{4z}{3} - \frac{2x}{3}$ , por lo que la integral  $I$  en el orden  $dydx dz$  es

$$I = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-\frac{4z}{3}-\frac{2x}{3}} f(x, y, z) dy dx dz.$$

**Ejemplo 5.50** Considere la integral triple  $I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz dy dx$ . Escriba  $I$  en el orden  $dydz dx$  y en el orden  $dx dy dz$ .

**Solución:** Primero, un dibujo del sólido  $Q$  se muestra en la figura 5.68.

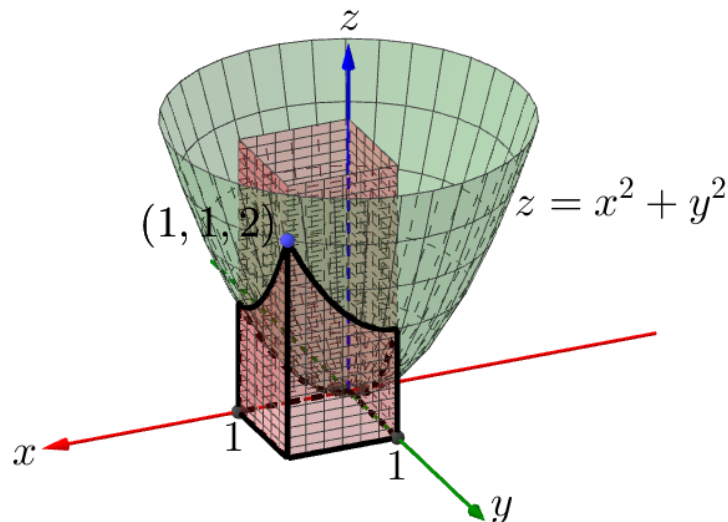


Figura 5.68: Sólido  $Q$

Además, note que si  $x = 1$  y  $y = 1$ , entonces en el paraboloide se tiene que  $z = 1^2 + 1^2 = 2$ , de donde se obtiene el punto  $(1, 1, 2)$ , mostrado en la figura anterior.

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

Luego, Para escribir  $I$  en los órdenes  $dydzdx$  y  $dx dydz$ , se necesitan las proyecciones de  $Q$  tanto en el plano  $xz$  con en el plano  $yz$ , los cuales se muestran en las figuras 5.69 y 5.70, de forma respectiva. Con ello, para el orden  $dydzdx$  note que el sólido  $Q$  está acotado desde el plano  $y = 0$  hasta el plano  $y = 1$ , así

$$I = \int_0^1 \int_0^{2x^2} \int_0^1 f(x, y, z) dydzdx.$$

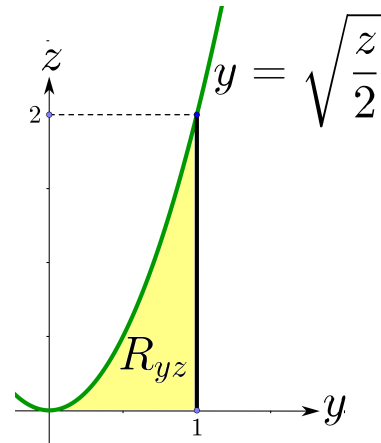
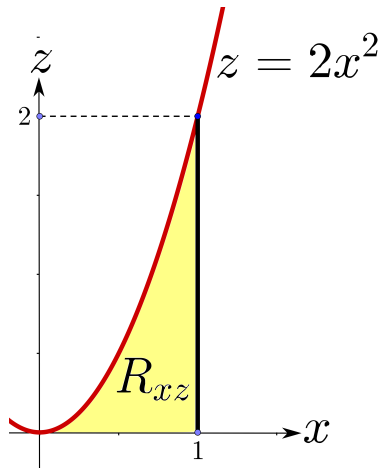


Figura 5.69: Proyección de  $Q$  sobre el plano  $xz$     Figura 5.70: Proyección de  $Q$  sobre el plano  $yz$

De forma análoga, en el orden  $dx dydz$  observe que el sólido  $Q$  está limitado por el plano  $x = 0$  y el plano  $x = 1$ , entonces

$$I = \int_0^2 \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dydz.$$

**Ejemplo 5.51** Considere la integral triple

$$I = \int_0^\pi \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \text{sen}(xy) dy dx dz.$$

1. Dibuje el sólido  $Q$  sobre el cual se está integrando.
2. Escriba la integral  $I$  en el orden de integración  $dydzdx$  y luego proceda a calcular dicha integral en este nuevo orden.

**Solución:**

1. Observe que el sólido  $Q$  está formado por el cilindro generalizado  $x = \sqrt{z} \Rightarrow x^2 = z$ , cortado por los planos  $z = \pi$ ,  $x = \sqrt{\pi}$ ,  $y = 0$  y  $y = x$ . Su dibujo se puede apreciar en la figura 5.71.

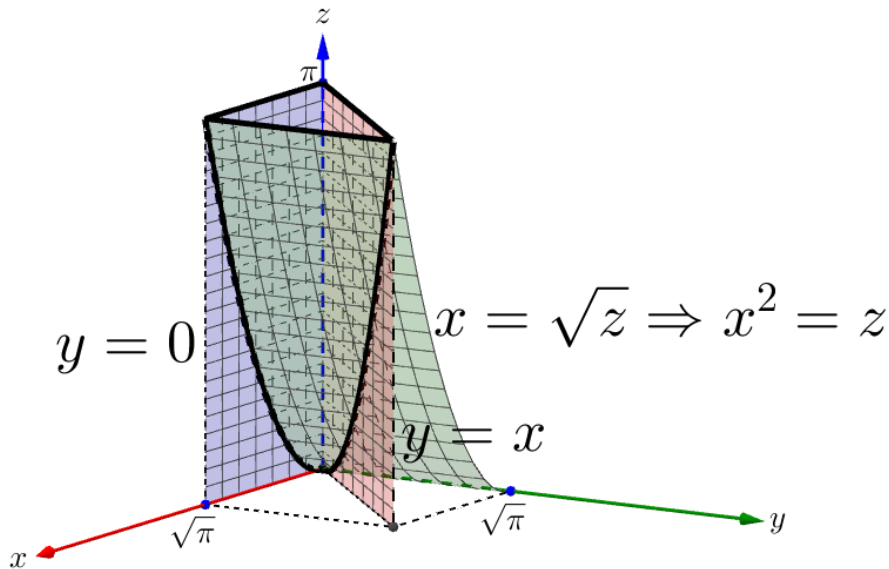


Figura 5.71: Sólido  $Q$

2. En el orden  $dydzdx$  la proyección del sólido  $Q$  se debe visualizar sobre el plano  $xz$ , así se tiene que  $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ ,  $0 \leq z \leq x^2$  y  $0 \leq y \leq x$ , con ello

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \int_0^x \text{sen}(xy) \, dydzdx.$$

Posteriormente su calculo se hace de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos(xy) \Big|_{y=0}^{y=x} \, dzdx \\ &= - \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} (\cos(x^2) - 1) \, dzdx \\ &= - \int_0^{\sqrt{\pi}} x (\cos(x^2) - 1) \, dx, \text{ sea } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx. \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(u) - 1) \, du \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## 5.2.3. Volumen

**Definición 5.11** (**Volumen**) Sea  $Q$  un sólido, se define el volumen de dicho sólido como

$$V_Q = \iiint_Q 1 \, dV.$$

**Ejemplo 5.52** Determine una integral triple iterada que permita calcular el volumen del sólido acotado por las superficies  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 12 - \frac{x^2}{3}$ .

**Solución:** Un dibujo aproximado de  $Q$  se muestra en la figura 5.72.

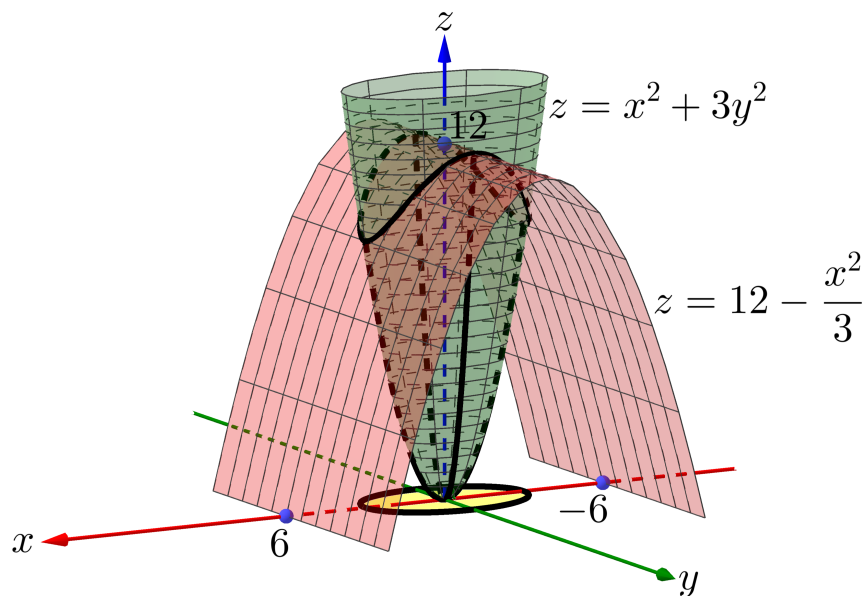


Figura 5.72: Sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $xy$

La integral solicitada se va a realizar en el orden  $dzdydx$  (sólido de tipo 1). Luego, la proyección  $R$  del sólido  $Q$  es la curva de intersección entre el paraboloide  $z = x^2 + 3y^2$  y el cilindro generalizado  $z = 12 - \frac{x^2}{3}$ , esto es

$$x^2 + 3y^2 = 12 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

la cual corresponde a una elipse. Para mayor facilidad solo se considerará la cuarta parte de  $R$  que corresponde al primer octante. Note además que  $Q$  está acotado inferiormente por el paraboloide

$z = x^2 + 3y^2$  y superiormente por el cilindro generalizado  $z = 12 - \frac{x^3}{3}$ , así una integral triple iterada en el orden  $dzdydx$  que permita calcular el volumen del sólido  $Q$  es

$$V_Q = 4 \int_0^3 \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+3y^2}^{12-\frac{x^3}{3}} 1 \, dzdydx,$$

lo que resuelve lo solicitado en el ejemplo. El lector puede verificar que  $V_Q = \pi$ .

**Ejemplo 5.53** Realice un dibujo del sólido  $Q$  acotado por las superficies  $z = 3x^2$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 0$  y  $z + y = 6$ . Además, use una integral triple iterada para determinar el valor de  $V_Q$ .

**Solución:** El dibujo del sólido  $Q$  se muestra en la figura 5.73.

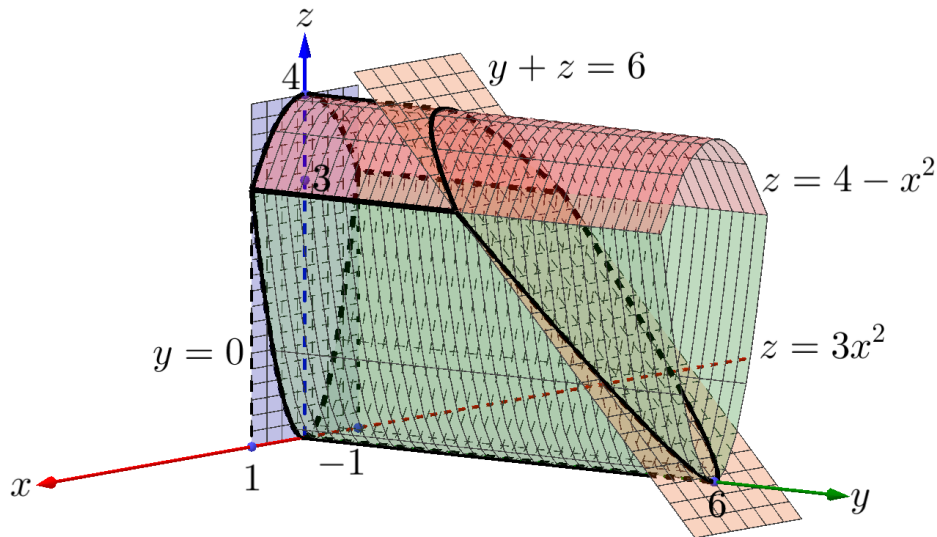


Figura 5.73: Sólido  $Q$

Ahora, para el volumen de  $Q$ , la integral triple iterada se va plantear en el orden  $dydzdx$ . Con ello, la proyección  $R$  del sólido  $Q$  está sobre el plano  $xz$ , donde es claro que

$$R = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 3x^2 \leq z \leq 4 - x^2 \right\}.$$

Además, observe que el sólido  $Q$  está acotado por el plano  $y = 0$  y el plano  $y = 6 - z$ , con esta información se tiene que

$$V_Q = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} 1 \, dydzdx.$$



Luego se verifica que  $V_Q = \frac{304}{15}$ .

### 5.2.4. Cambio de variables en una integral triple

**Teorema 5.6** Sea  $f : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $Q$  un conjunto cerrado y acotado y sea  $h : Q' \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow Q$  una función biyectiva y continuamente diferenciable con  $h(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ , entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| dV',$$

donde  $J(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$ , denominada Matriz Jacobiana o Jacobiano.

**Observación 5.10** En relación con el teorema 5.6 se debe tener presente que:

1. En ciertas ocasiones se facilita el trabajo si se emplea la fórmula  $|J(u, v, w)| = \frac{1}{|J(x, y, z)|}$ ,

$$\text{donde } J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

2. El determinante de la Matriz Jacobiana se tomará positivo.

**Ejemplo 5.54** Evalúe

$$I = \int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz,$$

aplicando la transformación  $u = \frac{2x-y}{2}$ ,  $v = \frac{y}{2}$  y  $w = \frac{z}{3}$ .

**Solución:** Primero, note que  $Q$  es el sólido limitado por los planos  $x = \frac{y}{2}$ ,  $x = \frac{y}{2} + 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 4$ ,  $z = 0$  y  $z = 3$ , según lo muestra la figura 5.74. Por otro lado, al despejar  $x$ ,  $y$  y  $z$  en términos de  $u$ ,  $v$  y  $w$  queda

$$x = u + v, \quad y = 2v \quad \text{y} \quad z = 3w.$$

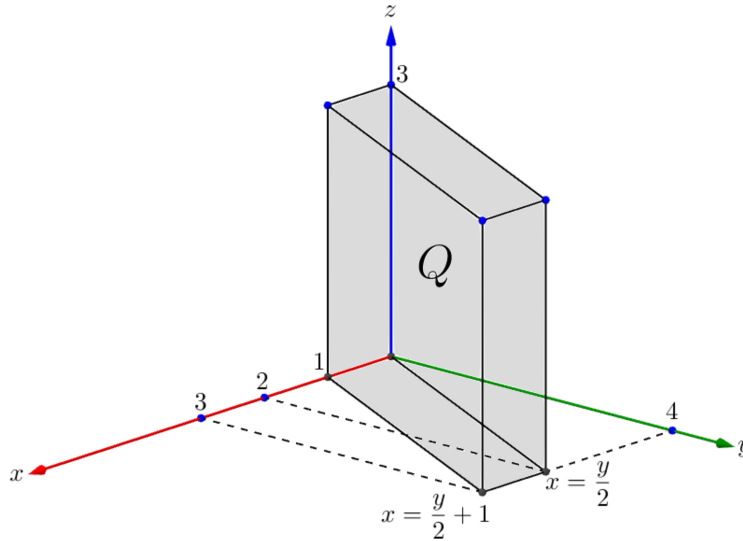


Figura 5.74: Sólido  $Q$

Ahora se procede a analizar las fronteras de sólido  $Q$  según el cambio de variables dado, esto es:

- Si  $x = \frac{y}{2}$ , entonces  $u + v = v \Rightarrow u = 0$ .
- Si  $x = \frac{y}{2} + 1$ , entonces  $u + v = v + 1 \Rightarrow u = 1$ .
- Si  $y = 0$  entonces  $v = 0$ .
- Si  $y = 4$  entonces  $v = 2$ .
- Si  $z = 0$  entonces  $w = 0$ .
- Si  $z = 3$  entonces  $w = 1$ .

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

Según la información anterior el sólido  $Q'$  es una caja rectangular dada por

$$Q' = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2, 0 \leq w \leq 1\}.$$

Luego, para el determinante del Jacobiano se tiene que

$$|J(u, v, w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \left( \frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dV \\ &= \iiint_{Q'} 6(u + w) dV' \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w) du dv dw \\ &= 12. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.55** Considere la integral

$$I = \iiint_Q \frac{xy + y^2}{x^3} dV,$$

donde  $Q$  es la región en el primer octante, que se encuentra bajo el plano  $x + y + z = 2$  y directamente arriba del trapecio en el plano  $xy$  limitado por las rectas  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = 0$  y  $y = x$ ,

1. Realice el dibujo de  $Q$
2. Considere el cambio de variables  $x = \frac{v}{1+w}$ ,  $y = \frac{vw}{1+w}$  y  $z = u - v$  y proceda a dibujar  $Q'$ .
3. Calcule  $I$  según el cambio de variables sugerido.

**Solución:** Para dibujar  $Q$ , primero se observa que el trapecio en el plano  $xy$  corresponde al mostrado en la figura 5.75.

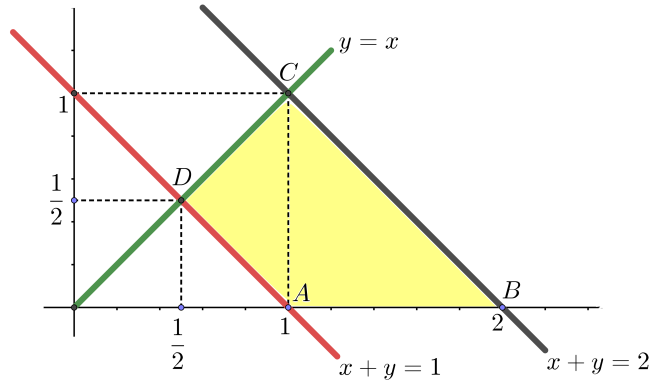


Figura 5.75: Trapecio sobre el plano  $xy$  acotado por  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = 0$  y  $y = x$

Luego, considere los puntos  $A(1,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(1,1)$  y  $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , los cuales se evalúan en el plano  $x + y + z = 2$  y así se obtiene el valor de  $z$ , correspondiente a la altura del sólido  $Q$ . Con ello, dicho sólido se muestra en la figura 5.76.

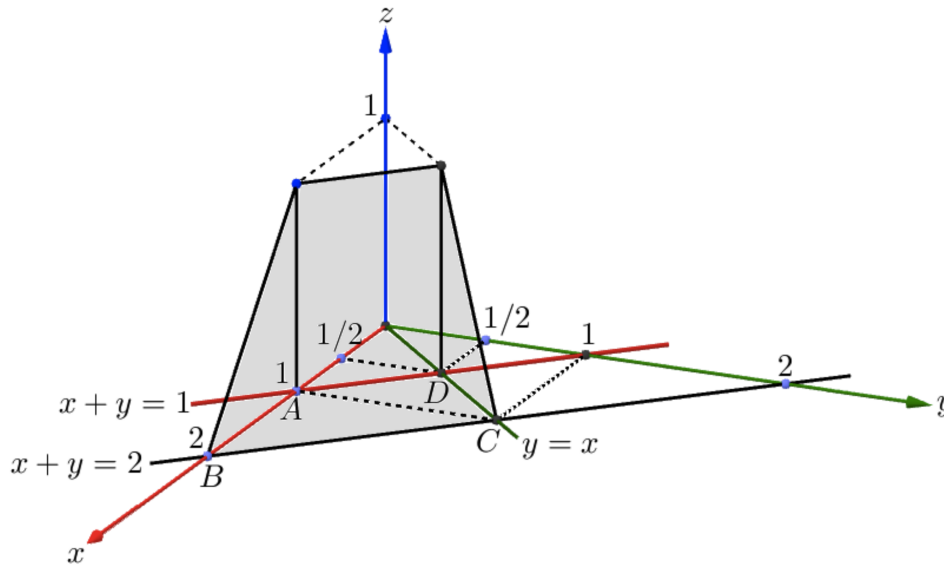


Figura 5.76: Sólido  $Q$

Con el fin de dibujar  $Q'$ , se hace un estudio de las fronteras de  $Q$  de acuerdo con el cambio de variables sugerido.

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

- Si  $x + y + z = 2$ , entonces  $\frac{v}{1+w} + \frac{vw}{1+w} + u - v = 2$ , lo que a su vez implica que  $u = 2$  ( $w \neq -1$ )<sup>7</sup>.
- Si  $x + y = 1$ , entonces  $\frac{v}{1+w} + \frac{vw}{1+w} = 1$ , con ello  $v = 1$ .
- Análogamente al anterior, si  $x + y = 2$ , entonces  $v = 2$  ( $w \neq -1$ ).
- Si  $y = x$ , entonces  $\frac{v}{1+w} = \frac{vw}{1+w} \Rightarrow v(1-w) = 0$ , de donde se obtiene solamente que  $w = 1$  ( $v = 0$  se descarta ya que  $1 \leq v \leq 2$ ).
- Si  $y = 0$ , entonces  $\frac{vw}{1+w} = 0 \Rightarrow vw = 0$ , de donde se tiene que  $w = 0$ .
- Si  $z = 0$ , entonces  $u - v = 0$ , es decir,  $u = v$ .

En resumen, el nuevo sólido  $Q'$  está limitado por los planos  $u = v$ ,  $v = 1$ ,  $v = 2$ ,  $w = 0$  y  $w = 1$ , cuyo dibujo se muestra en la figura 5.77.

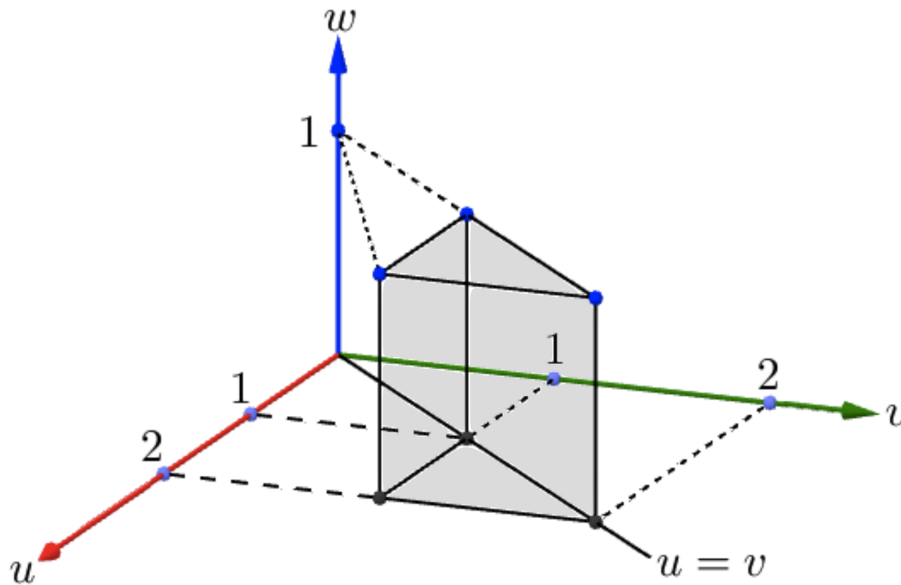


Figura 5.77: Sólido  $Q'$

Para determinar el valor de  $I$ , de la parte del análisis de las fronteras de  $Q$  según el cambio de variables dado, se deduce que  $u = x + y + z$  y  $v = x + y$ . Aunque no hay necesidad de hacerlo,

<sup>7</sup>En los demás caso se supondrá que  $w \neq -1$ .

también se puede obtener  $w$  en términos de  $x$  e  $y$ , para ello note que si

$$\begin{aligned} y &= \frac{vw}{1+w} \\ \Rightarrow y &= vw - yw \\ \Rightarrow w &= \frac{y}{v-y} \\ \Rightarrow w &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Ahora, para el determinante del Jacobiano observe que

$$|J(u, v, w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1+w} & \frac{-v}{(1+w)^2} \\ 0 & \frac{w}{1+w} & \frac{v}{(1+w)^2} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{v}{(1+w)^2}.$$

Antes de proceder a calcular  $I$ , su integrando queda como

$$\begin{aligned} \frac{xy + y^2}{x^3} &= y \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (x + y) \\ &= \frac{vw}{1+w} \cdot \frac{(1+w)^3}{v^3} \cdot v \\ &= \frac{w(1+w)^2}{v}. \end{aligned}$$

Finalmente, el valor de la  $I$  se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \frac{xy + y^2}{x^3} dV \\ &= \iiint_{Q'} \left( \frac{w(1+w)^2}{v} \cdot \frac{v}{(1+w)^2} \right) dV' \\ &= \int_0^1 \int_1^2 \int_v^2 w \, dudvdw \\ &= 1/4. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.56** Considere la integral  $I = \iiint_Q \frac{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z + \sen^2 x \sen^2 y \sen^2 z}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z} dV$ ,

donde  $Q$  es el poliedro limitado por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} - y$ ,  $y = \frac{\pi}{2} - z$  y  $z = \frac{\pi}{2} - x$ . Emplear el cambio de variables  $u = \frac{\sen x}{\cos y}$ ,  $v = \frac{\sen y}{\cos z}$  y  $w = \frac{\sen z}{\cos x}$  para

determinar el valor de  $I$ . Puede usar el hecho que  $0 \leq \sen x \leq \sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ , entonces

$$0 \leq \frac{\sen x}{\cos y} \leq 1.$$

**Solución:** Dado el poliedro  $Q$ , el cual se muestra en la figura 5.78 (no hay necesidad de dibujarlo), se procede a analizar las caras de este sólido en relación con las transformaciones dadas.

- Si  $x = 0$ , entonces  $u = 0$ .
- Si  $y = 0$ , entonces  $v = 0$ .
- Si  $z = 0$ , entonces  $w = 0$ .
- Si  $x = \frac{\pi}{2} - y$ , entonces  $u = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - y)}{\cos y} = \frac{\cos y}{\cos y} = 1 \Rightarrow u = 1$ .
- Si  $y = \frac{\pi}{2} - z$ , entonces  $v = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - z)}{\cos z} = \frac{\cos z}{\cos z} = 1 \Rightarrow v = 1$ .
- De forma similar, si  $z = \frac{\pi}{2} - x$  entonces  $w = 1$ .

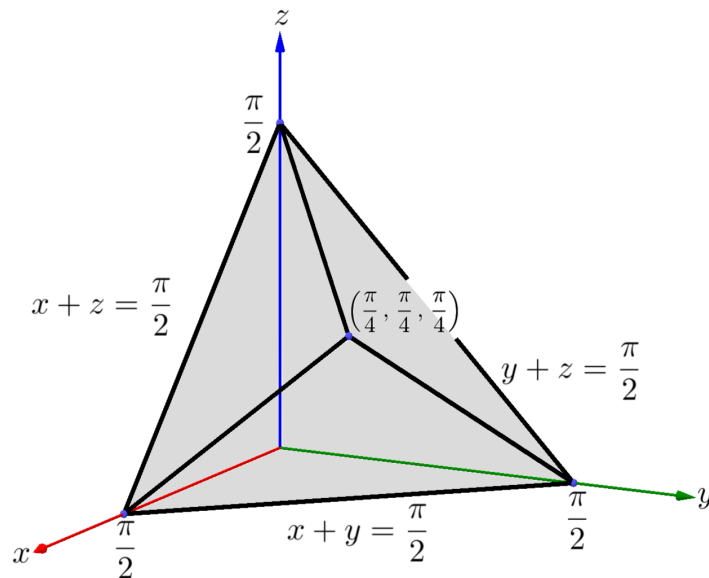


Figura 5.78: Sólido  $Q$

De lo anterior se deduce que  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$  y  $0 \leq w \leq 1$ , siendo así el sólido  $Q'$  un cubo de arista una unidad. Ahora, para el determinante del Jacobiano se emplea la fórmula

$$|J(u, v, w)| = \frac{1}{|J(x, y, z)|}, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} |J(x, y, z)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{\cos y} & \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} & 0 \\ 0 & \frac{\cos y}{\cos z} & \frac{\operatorname{sen} y \operatorname{sen} z}{\cos^2 z} \\ \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} & 0 & \frac{\cos z}{\cos x} \end{vmatrix}, \text{ usando la fila 1.} \\ &= \frac{\cos x}{\cos y} \cdot \frac{\cos y}{\cos z} \cdot \frac{\cos z}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} \cdot \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen} y \operatorname{sen} z}{\cos^2 z} + 0 \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z} \\ &= \frac{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}. \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que

$$|J(u, v, w)| = \frac{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y \operatorname{sen}^2 z}.$$

Con todo lo anterior, la integral triple  $I$  en las nuevas variables  $u, v$  y  $w$  queda como

$$I = \iiint_{Q'} 1 \, dV' = V_{Q'} = 1.$$

**Ejemplo 5.57** Determine el volumen del elipsoide dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

usando el cambio de variables  $x = au, y = bv$  y  $z = cw$ .

**Solución:** Sea  $Q$  el sólido formado por el alipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , por definición se tiene que

$$V_Q = \iiint_Q 1 \, dV.$$

Según el cambio de variables sugerido, al analizarlo sobre la superficie de  $Q$  se tiene que

$$\frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} + \frac{(cw)^2}{c^2} = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$



## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

es decir, el sólido  $Q'$  es una esfera centrada en el origen y de radio 1. Al calcular el determinante del Jacobiano se tiene que

$$|J(u, v, w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = abc.$$

Con esta información y recordando que una esfera de radio  $r$  tiene como volumen  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} V_Q &= \iiint_Q 1 \, dV \\ &= abc \iiint_{Q'} 1 \, dV' \\ &= abc \cdot V_{Q'} \\ &= \frac{4abc\pi}{3}. \end{aligned}$$

### 5.2.4.1. Coordenadas cilíndricas

En la práctica un caso frecuentado es el paso de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas descrito por el cambio de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z(r, \theta) \end{cases}, \text{ donde } r > 0 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

de donde

$$|J(r, \theta, z)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Con lo anterior se tiene que

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \iiint_{Q'} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r \, dz dr d\theta.$$

Este tipo de cambio de variables son útiles en particular para cálculos relacionados con sólidos de revolución.

**Ejemplo 5.58** Use coordenadas cilíndricas para calcular  $I = \iiint_Q (x^2 + y^2) dV$ , donde  $Q$  está limitado por el paraboloido  $x^2 + y^2 = 2z$  y el plano  $z = 2$ .

**Solución:** El dibujo de  $Q$  se muestra en la figura 5.79. Luego, si se usa coordenadas cilíndricas se tiene que  $0 \leq r \leq 2$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Por otro lado note que el sólido  $Q$  está acotado inferiormente por  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  y superiormente por  $z = 2$ , entonces

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2 \Rightarrow \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2.$$

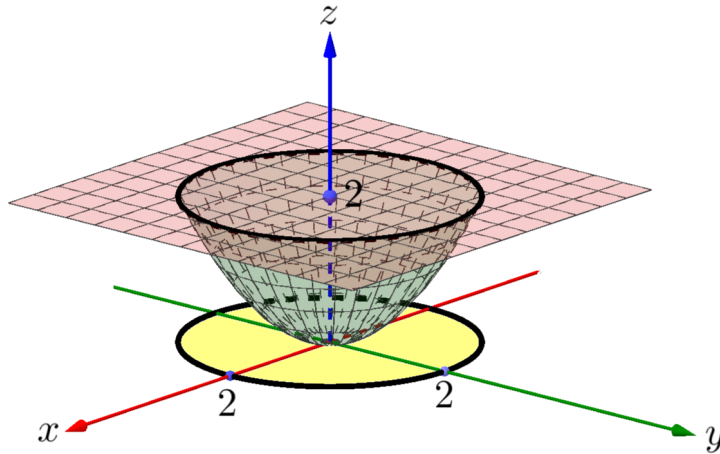


Figura 5.79: Sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $xy$

En relación con lo anterior se tendría que

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q (x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 \cdot r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( 2r^3 - \frac{r^5}{2} \right) dr d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.59** Determine el volumen del sólido  $Q$  limitado por el paraboloido  $\frac{z}{b} = x^2 + y^2$ ,  $b > 0$  y el plano  $z = h$ ,  $h > 0$ .

**Solución:** Usando coordenadas cilíndricas y como referencia el ejemplo anterior, se tiene que

$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{h}{b}}$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Además, el sólido  $Q$  está limitado inferiormente por el paraboloides  $z = b(x^2 + y^2)$  y superiormente por el plano  $z = h$ , con  $b$  y  $h$  constantes positivas, así

$$br^2 \leq z \leq h.$$

Entonces el volumen de sólido  $Q$  es

$$\begin{aligned} V_Q &= \iiint_Q 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{b}}} \int_{br^2}^h r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{h^2\pi}{2b}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.60** Verifique que el volumen de un cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $h$  es  $V = \pi a^2 h$ .

**Solución:** Un cilindro circular recto extendido sobre el eje  $z$  de radio  $a$  y altura  $h$  tiene como ecuación  $x^2 + y^2 = a^2$ , donde  $0 \leq z \leq h$  (ver figura 5.80).

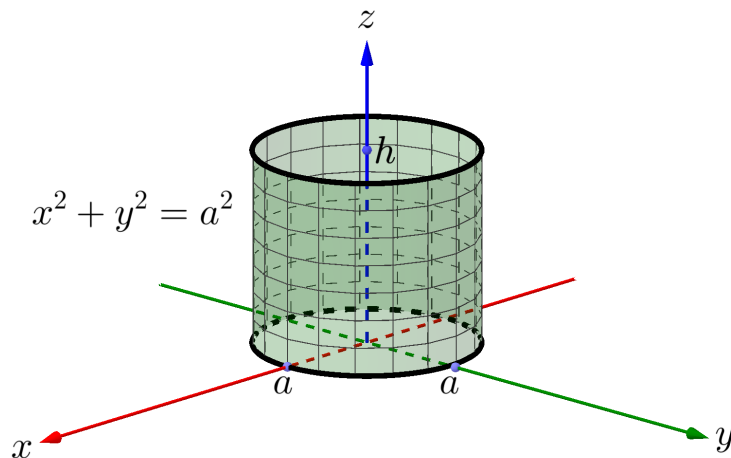


Figura 5.80: Cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $h$

Entonces, al usar coordenadas cilíndricas se tiene que el volumen del cilindro anterior es

$$\begin{aligned} V_Q &= \iiint_Q 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \pi a^2 h. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.61** Muestre que el volumen de una esfera de radio  $a$  es  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ .

**Solución:** La ecuación de una esfera de radio  $a$ , suponiendo que está centrada en el origen, es  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Por facilidad solo se va considerar la porción de dicha esfera ubicada en el primer octante, es decir, una octava parte, como lo muestra la figura 5.81.

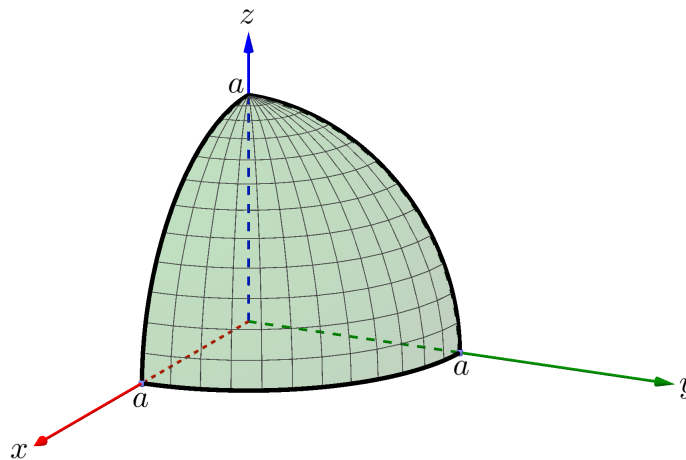


Figura 5.81: Esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  en el primer octante

Ahora, usando coordenadas cilíndricas, note que  $0 \leq r \leq a$  y que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Además, es claro que

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}.$$

A partir de lo anterior se cumple que

$$\begin{aligned} V_Q &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.62** Determine el volumen del sólido  $Q$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , el plano  $z + y = 4$  con  $z \geq 0$ .

**Solución:** El dibujo del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 5.82. Además, la región  $R$  de integración corresponde al círculo  $x^2 + y^2 = 4$  sobre el plano  $z = 0$ , con ello, al usar coordenadas cilíndricas se tiene que  $0 \leq r \leq 2$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

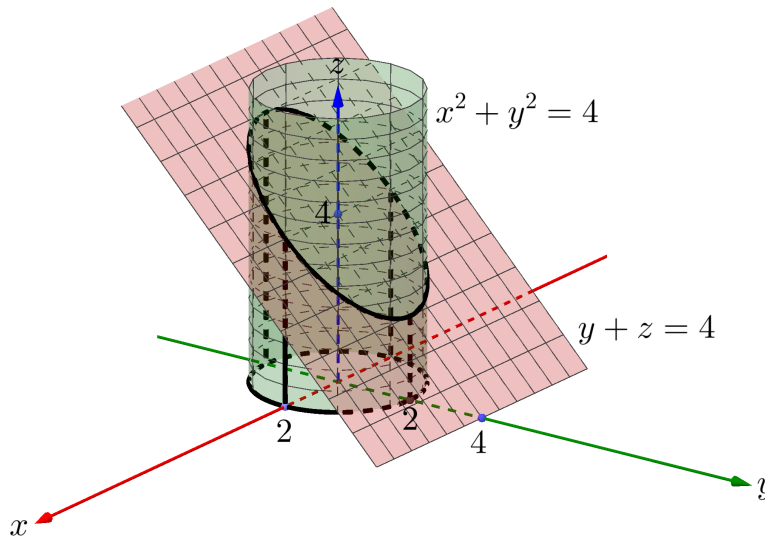


Figura 5.82: Sólido  $Q$

También, el sólido  $Q$  está acotado inferiormente por el plano  $z = 0$  y superiormente por el plano  $z = 4 - y$ , con ello se cumple que

$$0 \leq z \leq 4 - r \operatorname{sen} \theta.$$

Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} V_Q &= \iiint_Q 1 \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r \operatorname{sen} \theta} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.63** Calcule mediante una integral triple el volumen del sólido  $Q$  acotado por las superficies  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  y  $x + y - 2z = 0$ .

**Solución:** Es muy similar al ejemplo anterior, solo que este caso el plano  $x + y - 2z = 0$  interseca al cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  en su base inferior ubicada en el plano  $xy$ , por ello, haga  $z = 0$  en el plano  $x + y - 2z = 0 \Rightarrow x + y = 0$ . Con esto, la región de integración se muestra en la figura 5.83.

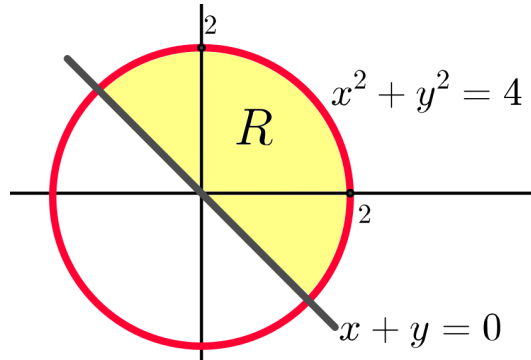


Figura 5.83: Proyección del sólido  $Q$  en el plano  $z = 0$

Según la figura anterior y al usar coordenadas cilíndricas es claro que  $0 \leq r \leq 2$  y  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ . Otra forma de obtener el movimiento del ángulo  $\theta$  es resolver la siguiente ecuación en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ \Rightarrow r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta &= 0 \\ \Rightarrow \operatorname{sen} \theta &= -\cos \theta \\ \Rightarrow \tan \theta &= -1 \\ \Rightarrow \theta &\in \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, note que el sólido  $Q$  está limitado inferiormente por  $z = 0$  y superiormente por  $z = \frac{1}{2}(x + y)$ , entonces

$$0 \leq z \leq \frac{r}{2}(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta).$$

Finalmente se tiene que

$$V_Q = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^2 \int_0^{\frac{r}{2}(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

**Ejemplo 5.64** Utilice una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar el volumen de un cono circular recto de altura  $h$  y radio  $a$ , suponiendo que se extiende a lo largo del eje  $z$  y la base se encuentra sobre el plano  $z = 0$ .

**Solución:** La figura 5.84 corresponde al cono circular recto de altura  $h$  y radio  $a$  con la base sobre  $z = 0$ .

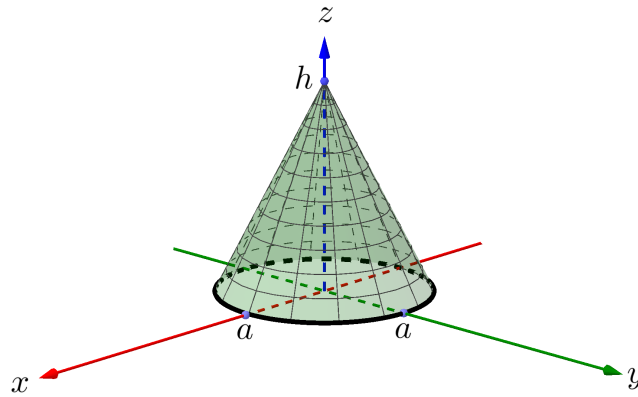


Figura 5.84: Cono circular recto de altura  $h$  y radio  $a$  con la base sobre  $z = 0$

Observe que el vértice del cono es  $V(0, 0, h)$  y la directriz es la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases},$$

así, usando la teoría expuesta en el Capítulo 1, se concluye que la ecuación del cono es

$$\frac{h^2}{(h-z)^2} (x^2 + y^2) = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2} (h-z)^2.$$

Usando coordenadas cilíndricas note que que  $0 \leq r \leq a$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Además, se despeja  $z$  de la ecuación del cono, esto es:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{h^2} (h-z)^2 \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{a^2}{h^2} (h-z)^2 \\ \Rightarrow r &= \frac{a}{h} (h-z) \\ \Rightarrow z &= h - \frac{rh}{a}. \end{aligned}$$

Con lo anterior se deduce que  $0 \leq z \leq h - \frac{rh}{a}$ , entonces

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{h-\frac{rh}{a}} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

**Ejemplo 5.65** Mediante **una sola** integral triple determine el volumen del sólido  $Q$  que se encuentra dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y fuera del cilindro  $x^2 + y^2 = b^2$ , con  $0 < b < a$ .

**Solución:** Por simplicidad solo se va considerar la mitad superior de sólido  $Q$  y se utilizará una integral triple en coordenadas cilíndricas. Así, el sólido  $Q$  y su proyección sobre el plano  $xy$  se pueden visualizar en la figura 5.85.

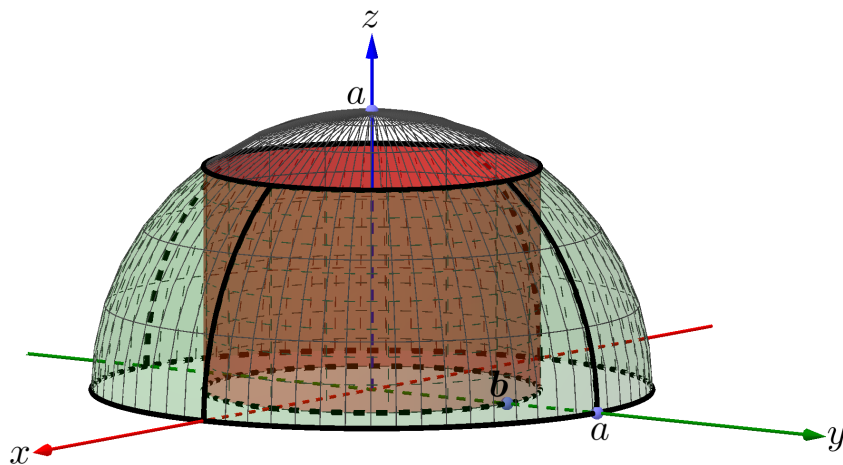


Figura 5.85: Sólido  $Q$

En relación con esta figura observe que  $b \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y que la mitad del sólido  $Q$  está acotado inferiormente por  $z = 0$  y superiormente por  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , así  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$ . Entonces el volumen de  $Q$  está dado por

$$V_Q = 2 \int_0^{2\pi} \int_b^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{4\pi}{3} (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

**Ejemplo 5.66** Plantee una integral triple, tanto en coordenadas rectangulares como coordenadas cilíndricas, que permita calcular el volumen del sólido  $Q$  acotado por las superficies  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  y  $z = 0$ .

**Solución:** Note que la ecuación  $z = x^2 + y^2$  corresponde a un paraboloides, y las ecuaciones



## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

$x^2 + y^2 = x$  y  $x^2 + y^2 = 2x$  son cilindros de la forma  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  y  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  de forma respectiva. Con esta información el dibujo del sólido  $Q$  y su proyección sobre el plano  $z = 0$  se observa en la figura 5.86.

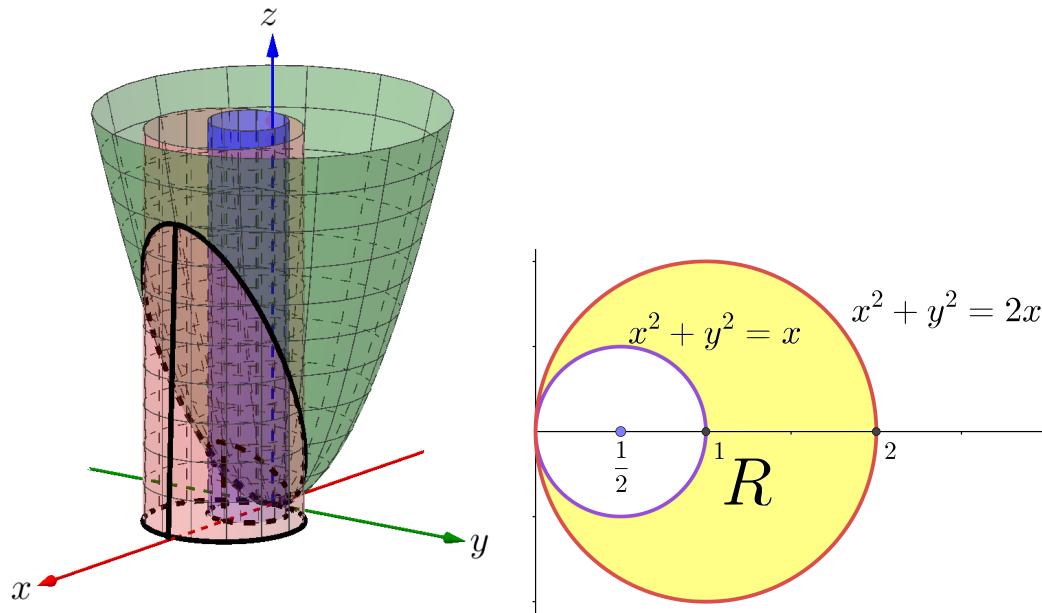


Figura 5.86: Sólido  $Q$  y su proyección sobre el plano  $xy$

Se observa que el sólido  $Q$  está acotado inferiormente por el plano  $z = 0$  y superiormente por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ . Además, dada la simetría de este sólido, solo se va considerar la mitad, ubicada en el primer octante. De esta forma, tomando  $Q$  como un sólido de tipo 1, la integral triple en coordenadas rectangulares en el orden  $dzdydx$  que calcula el volumen de  $Q$  es

$$V_Q = 2 \int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} 1 \, dzdydx + 2 \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} 1 \, dzdydx.$$

Ahora, aún tomando la parte de  $Q$  en el primer octante y usando coordenadas cilíndricas, se deduce que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Para el radio  $r$  se tiene que si  $x^2 + y^2 = x$ , entonces  $r^2 = r \cos \theta$ , de donde  $r = \cos \theta$ . De forma análoga, si  $x^2 + y^2 = 2x$  se concluye que  $r = 2 \cos \theta$ , con ello  $\cos \theta \leq r \leq 2 \cos \theta$ . Así, la integral triple en coordenadas cilíndricas que determina el volumen de  $Q$  es

$$V_Q = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} \int_0^{r^2} r \, dzdrd\theta.$$

**Ejemplo 5.67** Sea el sólido  $Q$  la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  con los conos  $x^2 + y^2 \geq (z + 1)^2$  y  $x^2 + y^2 \geq (z - 1)^2$ .

1. Dibuje el sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $z = 0$ .
2. Plantee y calcule una integral triple en coordenadas cilíndricas para determinar el volumen de  $Q$ .

**Solución:**

1. Para dibujar  $Q$ , observe que este cuerpo sólido corresponde al interior del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  y fuera de los conos  $x^2 + y^2 \geq (z + 1)^2$  y  $x^2 + y^2 \geq (z - 1)^2$ . Además considere lo siguiente:

- La intersección de los conos  $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$  y  $x^2 + y^2 \geq (z - 1)^2$  ocurre cuando  $(z + 1)^2 = (z - 1)^2$ , es decir, cuando  $z = 0$ , formando el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .
- La intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  con el cono  $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$  ocurre cuando  $(z + 1)^2 = 4$ , es decir, cuando  $z = -3$  y  $z = 1$ , en ambos casos forma el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
- De forma similar, la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  con el cono  $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$  se da cuando  $(z - 1)^2 = 4$ , es decir, cuando  $z = 3$  y  $z = -1$ , en ambos casos también se forma el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
- Con la información anterior, el sólido  $Q$  se muestra en la figura 5.87.

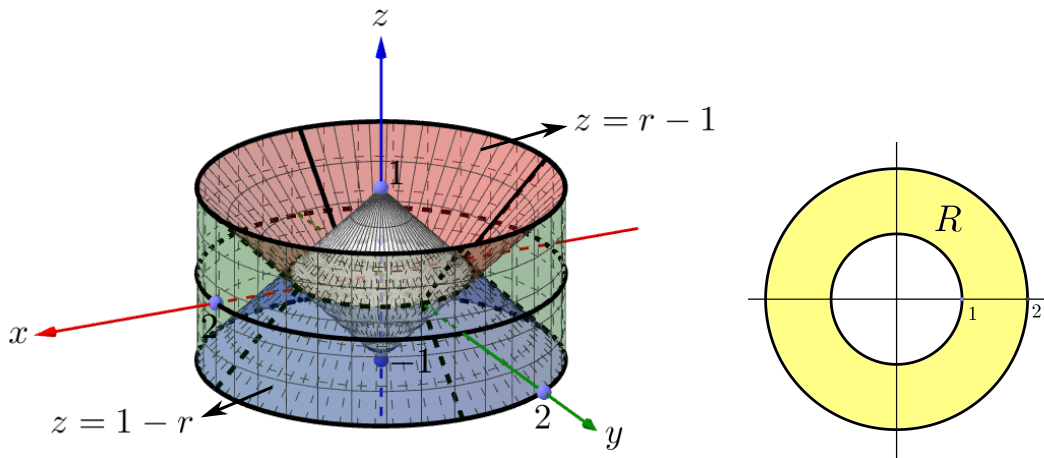


Figura 5.87: Sólido  $Q$  y su proyección sobre el plano  $xy$

2. En coordenadas cilíndricas el cono  $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$  es  $r^2 = (z + 1)^2 \Rightarrow \pm r = z + 1 \Rightarrow z = \pm r - 1$ , pero solo se necesita la parte de arriba de dicho cono, entonces  $z = r - 1$ . Análogamente, el cono  $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$  es  $\pm r = z - 1 \Rightarrow z = \pm r + 1$ , sin embargo, únicamente se necesita la parte de abajo de dicho cono, entonces  $z = 1 - r$ . Por otro lado note que  $1 \leq r \leq 2$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Luego, aprovechando que el sólido es simétrico, solo se

considera cuando  $z \geq 0$  (la mitad superior del sólido  $Q$ ). Con ello el volumen de  $Q$  es

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r-1} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{5\pi}{3}.$$

**Ejemplo 5.68** Use coordenadas cilíndricas en el orden  $drdzd\theta$  para calcular el valor de la integral triple

$$I = \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

donde  $Q$  es el sólido formado por debajo del plano  $z = 3$  e interior al cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solución:** Un dibujo del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 5.88.

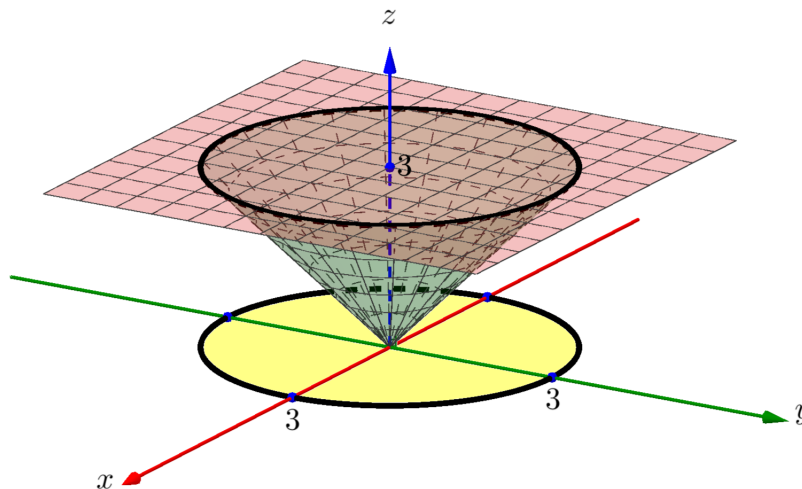


Figura 5.88: Sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $xy$

Ahora, para plantear  $I$  en coordenadas cilíndricas en el orden usual  $drdzd\theta$  observe que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq r \leq 3$ . Además, según el dibujo de la figura 5.88 es claro que  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3$ , lo cual equivale a  $r \leq z \leq 3$ . El integrando corresponde a  $\sqrt{(x^2 + y^2) + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Entonces  $I$  queda como

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 \sqrt{r^2 + z^2} \, r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Se puede apreciar que en el orden  $dzdrd\theta$  la integral es de difícil cálculo, de allí que se solicita hacerlo en el orden  $drdzd\theta$ , para lo cual note que  $\theta$  se mantiene invariante, con ello la estrategia consiste en trabajar sobre el plano  $rz$ , donde se dibuja la región plana dada por

$$R' = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 3, r \leq z \leq 3\},$$

y la cual se muestra en la figura 5.89. Esta región es de tipo 1 ( $dzdr$ ), la cual se procede a escribir como tipo 2 ( $drdz$ ), quedando

$$R' = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq z, 0 \leq z \leq 3\}.$$

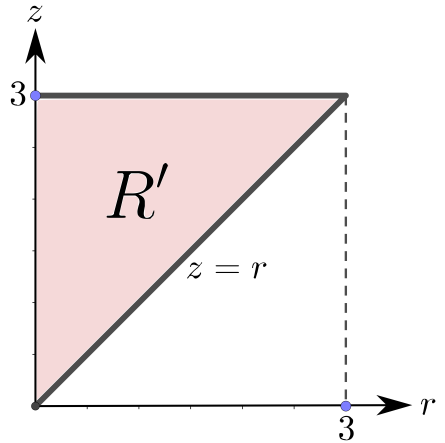


Figura 5.89: Región  $R'$  sobre el plano  $rz$

Con lo anterior, la integral  $I$  en el orden  $drdzd\theta$  se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^z \sqrt{r^2 + z^2} r \, dr \, dz \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} \int_0^3 z^3 \, dz \, d\theta \\ &= \frac{27}{4} (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{27\pi}{2} (2\sqrt{2} - 1), \end{aligned}$$

siendo este el resultado buscado. Cabe destacar que para el calculo anterior, en el primer paso se aplica el cambio de variable  $u = r^2 + z^2$ , lo cual implica que  $\frac{du}{2} = r \, dr$ .

#### 5.2.4.2. Coordenadas esféricas

Otro caso muy usado para calcular integrales triples es el paso de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas descrito por el cambio de variables

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases},$$

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

donde si  $P(x, y, z)$  es un punto sobre la superficie, entonces  $\rho$  es la distancia del origen al punto  $P$ , el ángulo  $\theta$  formado, en el plano  $xy$ , por el segmento que une el origen con el punto  $(x, y, 0)$  con la parte positiva del eje  $x$ , y, el ángulo  $\phi$  por el segmento que une el origen con el punto  $P$  con la parte positiva del eje  $z$ , como se muestra en la figura 5.90.

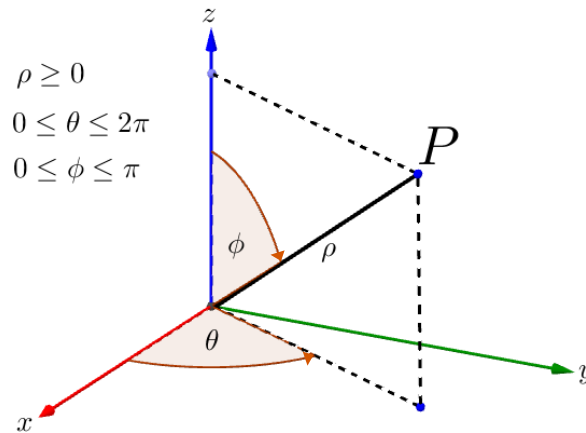


Figura 5.90: Coordenadas esféricas  $P(\rho, \theta, \phi)$

Además, para el determinante del Jacobiano se tiene que

$$\begin{aligned}
 |J(\rho, \theta, \phi)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \text{sen } \phi \cos \theta & -\rho \text{sen } \phi \text{sen } \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \text{sen } \phi \text{sen } \theta & \rho \text{sen } \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \text{sen } \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \text{sen } \phi \end{vmatrix} \\
 &= -\rho^2 \text{sen } \phi, \text{ el cual se toma positivo.}
 \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q'} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta.$$

Además, al emplear coordenadas esféricas note que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 + (\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (\rho \cos \phi)^2 \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.69** Emplee una integral triple en coordenadas esféricas para calcular el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Solución:** Al utilizar coordenadas esféricas observe que  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  equivale a  $\rho = a$ , con lo cual  $0 \leq \rho \leq a$ . Además, observe que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Por último, la integral triple en coordenadas esféricas que determina el volumen de la esfera es

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \phi \Big|_{\rho=0}^{\rho=a} d\phi d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos \phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\ &= \frac{2}{3} a^3 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.70** Use una integral triple en coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido  $Q$  acotado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cono  $z^2 = x^2 + y^2$ , con  $z \geq 0$ .

**Solución:** El dibujo del sólido  $Q$  se muestra en la figura 5.91.

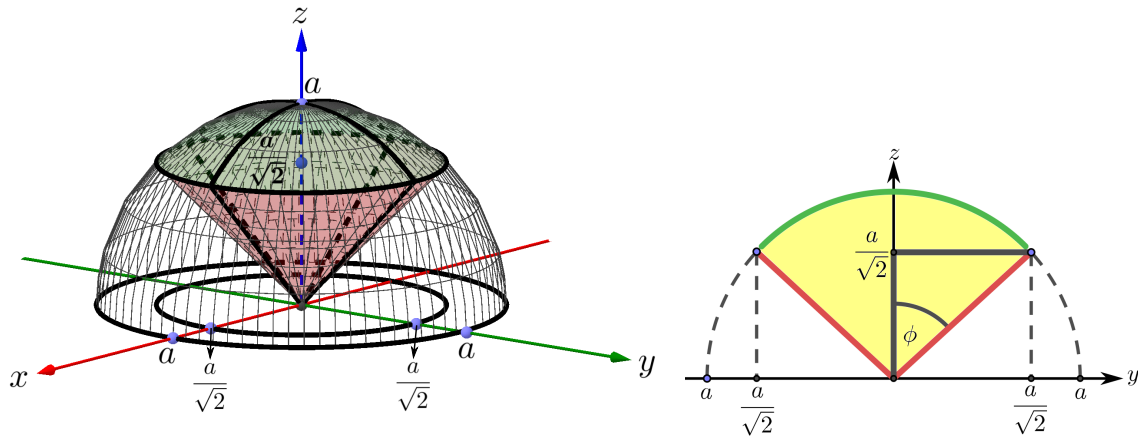


Figura 5.91: Sólido  $Q$  y las coordenadas esféricas

Es claro que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Además, usando trigonometría básica se deduce que  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ . Otra forma de obtener el intervalo de movimiento del ángulo  $\phi$  es despejarlo de la ecuación del cono, como sigue:

$$\begin{aligned}
 z^2 &= x^2 + y^2 \\
 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\
 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi &= \rho^2 \sin^2 \phi \\
 \Rightarrow 1 &= \tan^2 \phi \\
 \Rightarrow \phi &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Además, de forma similar al ejemplo anterior, se deduce que  $0 \leq \rho \leq a$ . Con ello se tiene que

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

**Ejemplo 5.71** Calcule el volumen del sólido  $Q$  contenido en el primer octante y acotado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y los planos  $x = y$  y  $x = 0$ . Para ello use una integral triple en coordenadas esféricas.

**Solución:** Un dibujo del sólido  $Q$  se puede ver en la figura 5.92.

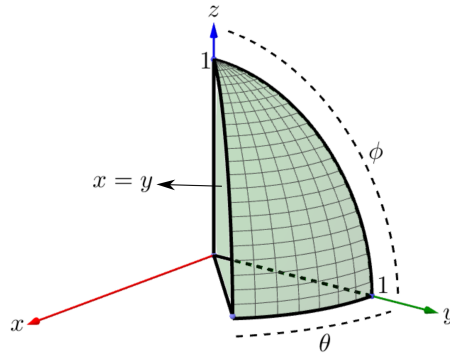


Figura 5.92: Sólido  $Q$  y las coordenadas esféricas

Además, por medio del dibujo mostrado anteriormente se infiere que  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \rho \leq 1$ . Entonces se tendría que

$$V_Q = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

**Ejemplo 5.72** Plantee, usando coordenadas esféricas, la integral  $I = \iiint_Q (x^2 + y^2) \, dV$ , donde  $Q$  es el sólido  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** El dibujo del sólido  $Q$  con los movimientos de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  se observan en la figura 5.93. Con ello se cumple que  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

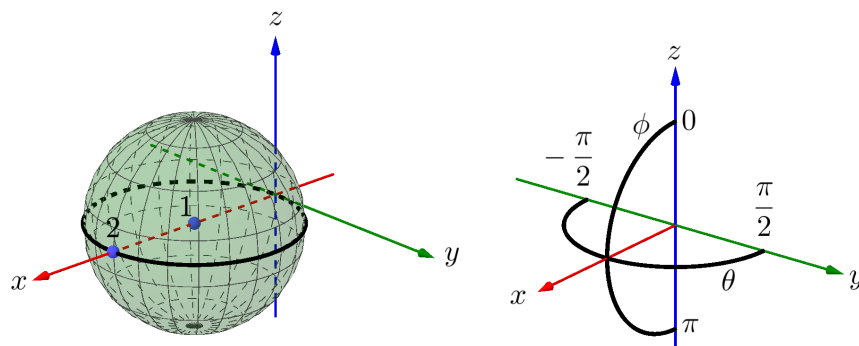


Figura 5.93: Sólido  $Q$  y las coordenadas esféricas

Además, en dicha figura se infiere que el valor de  $\rho$  no es constante, como ocurre en los ejemplos pasados. Entonces, este se despeja de la ecuación de la esfera  $Q : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2) - 2x + 1 &= 1 \\
\Rightarrow \rho^2 - 2\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta &= 0 \\
\Rightarrow \rho &= 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta,
\end{aligned}$$

con lo cual  $0 \leq \rho \leq 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ . Finalmente, con esta información, la integral  $I$  en coordenadas esféricas queda como

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_Q (x^2 + y^2) dV \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta} (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi) d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta} (\rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi) d\rho d\phi d\theta.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 5.73** Utilice coordenadas esféricas para calcular

$$I = \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

donde  $Q$  es el sólido limitado por la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

**Solución:** El sólido  $Q$  está dado por la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$ , que completando al cuadrado es la esfera

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

la cual está centrada en  $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$  y de radio  $\frac{1}{2}$ . No es difícil deducir que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Para obtener el intervalo de movimiento de  $\rho$ , similarmente al ejemplo anterior, se despeja de la ecuación de la esfera, como sigue:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= z \\
\Rightarrow \rho^2 &= \rho \cos \phi \\
\Rightarrow \rho(\rho - \cos \phi) &= 0 \\
\Rightarrow \rho &= \cos \phi,
\end{aligned}$$

con lo cual  $0 \leq \rho \leq \cos \phi$ , así se tendría que

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \phi} \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.74** Considere el sólido  $Q$  limitado superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e inferiormente por el paraboloides  $3z = x^2 + y^2$ .

1. Escriba la integral o suma de integrales triples en coordenadas cilíndricas, en el orden  $dzdrd\theta$ , correspondiente al volumen de  $Q$ .
2. Escriba la integral o suma de integrales triples en coordenadas esféricas, en el orden  $d\rho d\phi d\theta$ , correspondiente al volumen de  $Q$ .

**Solución:**

1. Es importante primero hacer un bosquejo del sólido  $Q$ . Para ello, se busca la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  con el paraboloides  $3z = x^2 + y^2$ , de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} 3z + z^2 &= 4 \\ \Rightarrow z^2 + 3z - 4 &= 0 \\ \Rightarrow z = -4 \text{ o } z = 1. \end{aligned}$$

Se descarta el valor  $z = -4$  pues la expresión  $x^2 + y^2 = -4 \cdot 3$  es falsa. Ahora, si  $z = 1$ , la curva de intersección y a la vez la región proyectada en el plano  $xy$  es  $x^2 + y^2 = 3$ . Con esta información, el dibujo del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 5.94.

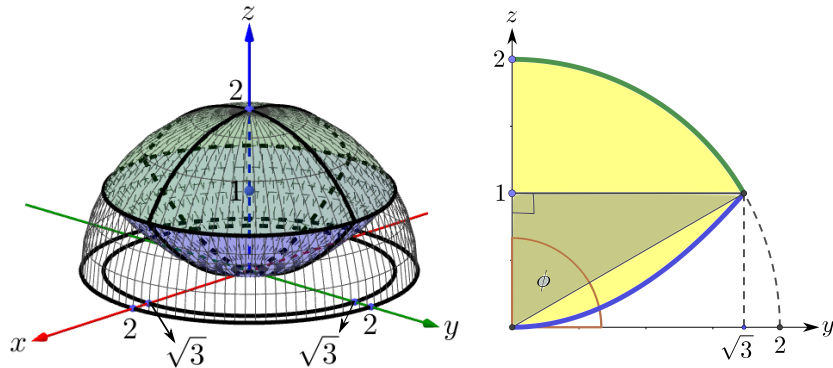


Figura 5.94: Sólido  $Q$  y parte de su proyección en el plano  $zy$

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

Es claro que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq r \leq \sqrt{3}$ . Note que el sólido  $Q$  está limitado inferiormente por el paraboloide  $x^2 + y^2 = 3z$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , que en coordenadas cilíndricas equivale a

$$\frac{r^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Con lo anterior se tiene que

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

2. Si se usa coordenadas esféricas se cumple  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Sin embargo, observe que la distancia  $\rho$  depende tanto de la esfera como del paraboloide, así, aplicando trigonometría básica al triángulo sombreado de la figura 5.94, se tiene que

- Si  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$  entonces  $\rho$  depende de la esfera, así  $0 \leq \rho \leq 2$ .
- Si  $\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  entonces  $\rho$  depende del paraboloide, así

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3z \\ \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta &= 3\rho \cos \phi \\ \Rightarrow \rho &= \frac{3 \cos \phi}{\sin^2 \phi}, \end{aligned}$$

con lo cual  $0 \leq \rho \leq 3 \cot \phi \csc \phi$ .

Finalmente se tiene que

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{3 \cot \phi \csc \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

**Ejemplo 5.75** Escriba una integral triple en coordenadas esféricas que permita calcular el volumen del sólido  $Q$  formado por la intersección de las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz$ , con  $2b > a$ .

**Solución:** Al igualar las dos esferas se obtiene que ambas se cortan en el plano  $z = \frac{a^2}{2b}$ , y al sustituir este resultado en cualquiera de las dos esferas se obtiene la curva de intersección

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{a}{2b} \sqrt{4b^2 - a^2} \right)^2,$$

que corresponde a un círculo centrado en el origen y de radio  $\frac{a}{2b} \sqrt{4b^2 - a^2}$ , que a su vez es la proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$ . Luego, la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz$  equivale a

$x^2 + y^2 + (z - b)^2 = b^2$ . Además, si  $2b > a$  entonces  $b > \frac{a}{2}$ . Con esta información basta para trazar el sólido  $Q$ , el cual se puede apreciar en la figura 5.95.

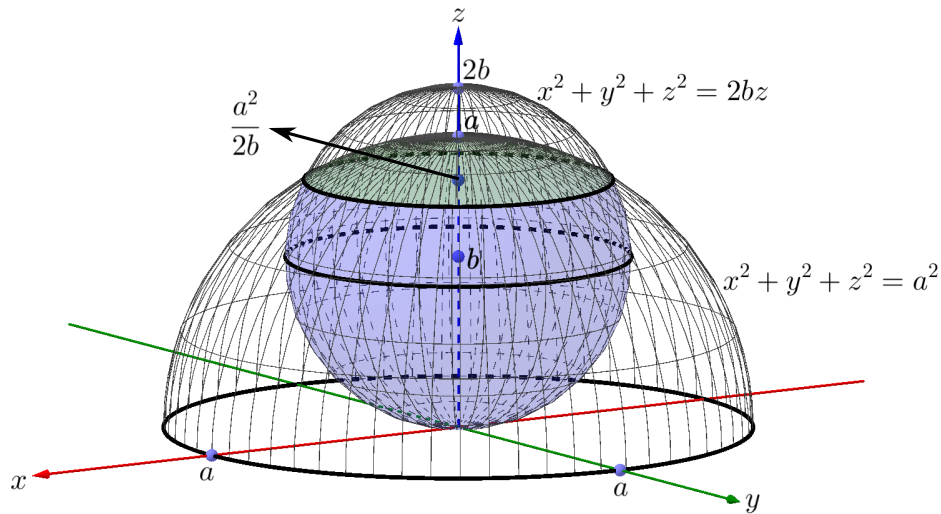


Figura 5.95: Sólido  $Q$

Además note que al usar coordenadas esféricas se cumple que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , pero el valor de  $\rho$  depende de ambas esferas, así, según el triángulo rectángulo mostrado en la figura 5.96, se identifica que:

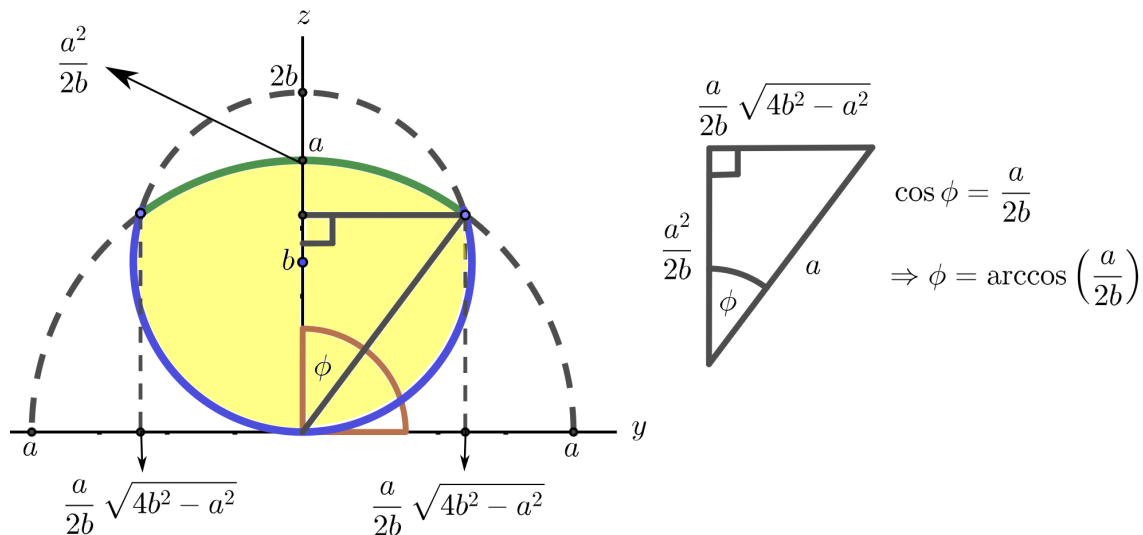


Figura 5.96: Coordenadas esféricas del sólido  $Q$

- Si  $0 \leq \phi \leq \arccos\left(\frac{a}{2b}\right)$ , entonces  $\rho$  depende de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , con lo cual  $0 \leq \rho \leq a$ .

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

- Si  $\arccos\left(\frac{a}{2b}\right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  entonces  $\rho$  depende de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2bz$ , esto es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2bz \\ \Rightarrow \rho^2 &= 2b\rho \cos \phi \\ \Rightarrow \rho &= 2b \cos \phi, \end{aligned}$$

así  $0 \leq \rho \leq 2b \cos \phi$ .

Finalmente, en relación con la información anterior, la integral triple en coordenadas esféricas que determina el volumen del sólido  $Q$  es

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(\frac{a}{2b})} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arccos(\frac{a}{2b})}^{\pi/2} \int_0^{2b \cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

**Ejemplo 5.76** Calcule el volumen del sólido  $Q$  que corresponde a la porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  entre los planos  $z = -3$  y  $z = 3\sqrt{3}$ , esto por medio de una integral triple en coordenadas esféricas.

**Solución:** Un dibujo del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 5.97.

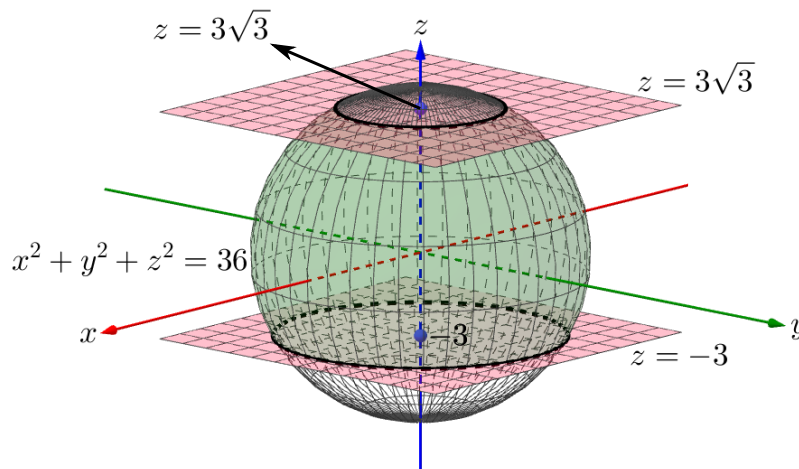


Figura 5.97: Sólido  $Q$

Para determinar los rangos donde se mueven las variables  $\rho$  y  $\phi$ , observe la figura 5.98.

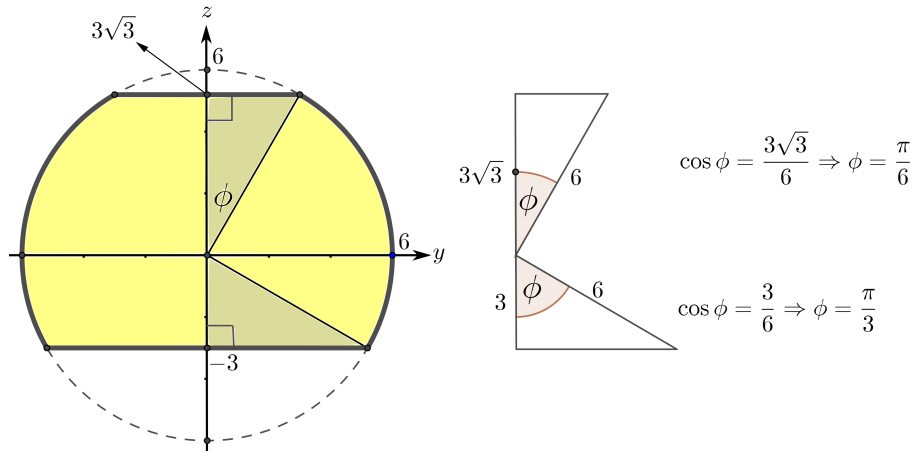


Figura 5.98: Coordenadas esféricas del sólido  $Q$

Según las figuras anteriores, el movimiento de  $\rho$  está restringido a tres superficies: en el primer caso, cuando  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$  depende del plano  $z = 3\sqrt{3}$ , esto es

$$\rho \cos \phi = 3\sqrt{3} \Rightarrow \rho = 3\sqrt{3} \sec \phi,$$

con ello  $0 \leq \rho \leq 3\sqrt{3} \sec \phi$ . En el segundo caso, note que  $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \pi - \frac{\pi}{3}$  y que  $0 \leq \rho \leq 6$ . En el tercer caso ocurre cuando  $\pi - \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \pi$ , donde además se tiene que el intervalo de  $\rho$  depende del plano  $z = -3$ , es decir,

$$\rho \cos \phi = -3 \Rightarrow \rho = -3 \sec \phi.$$

Según lo anterior, y dejando como ejercicio el cálculo de las integrales, se tiene que

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{3\sqrt{3} \sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \int_0^6 \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \int_0^{-3 \sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta = 81\sqrt{3}\pi + 99\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.77** Considere la integral triple

$$I = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz dy dx.$$

1. Dibuje el sólido  $Q$  sobre el cual se está integrando.
2. Expresé  $I$  en coordenadas esféricas en el orden  $d\rho d\phi d\theta$ .

3. Expresa  $I$  en coordenadas esféricas en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

### Solución:

1. Según la integral  $I$  el sólido  $Q$  es de tipo 1, el cual está acotado por el cilindro  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ , limitado inferiormente por el plano  $z = 0$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Con esta información se procede a dibujar dicho sólido, el cual se puede apreciar en la figura 5.99.

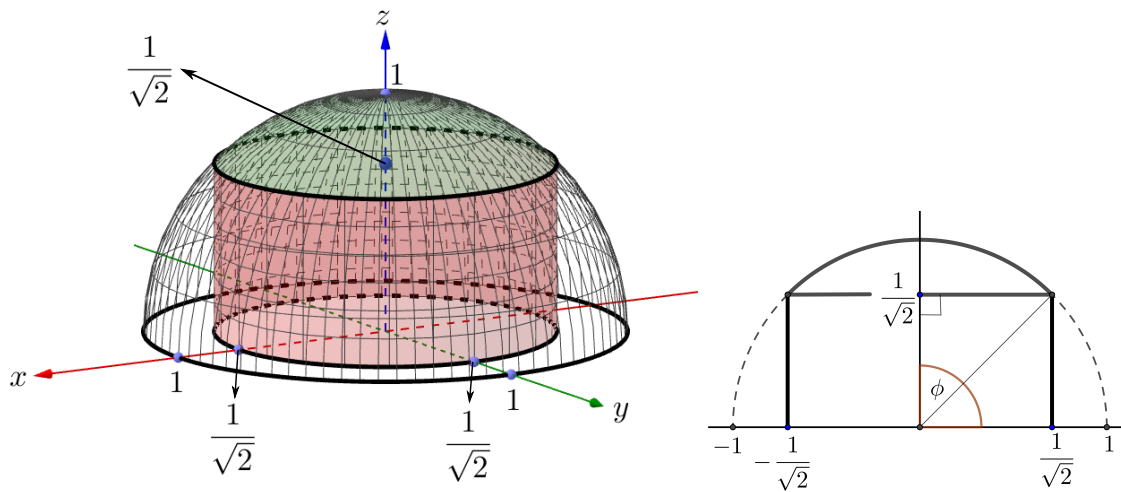


Figura 5.99: Sólido  $Q$

2. De acuerdo con el dibujo realizado se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , sin embargo, el valor de  $\rho$  depende tanto del cilindro como de la esfera. Así, aplicando trigonometría básica al triángulo rectángulo de la figura 5.99 se observa que:

- Si  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ , entonces  $\rho$  depende de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , con lo cual  $0 \leq \rho \leq 1$ .
- Si  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  entonces  $\rho$  depende del cilindro  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ , esto es

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \rho &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sec \phi,
 \end{aligned}$$

con ello  $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \csc \phi$ .

De esta forma, la integral  $I$  en coordenadas esféricas en el orden  $d\rho d\phi d\theta$  es

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc \phi} \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

3. Para escribir  $I$  en coordenadas esféricas en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ , note que  $\theta$  se mantiene sin variación, así la estrategia está en dibujar la siguiente región en el plano “ $\phi\rho$ ”.

$$R = \begin{cases} R_1 & = \{(\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 1\} \\ R_2 & = \{(\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \csc \phi\} \end{cases}.$$

Esta región es de tipo 1 (ver figura 5.100) y se debe escribir como tipo 2 (ver figura 5.101).

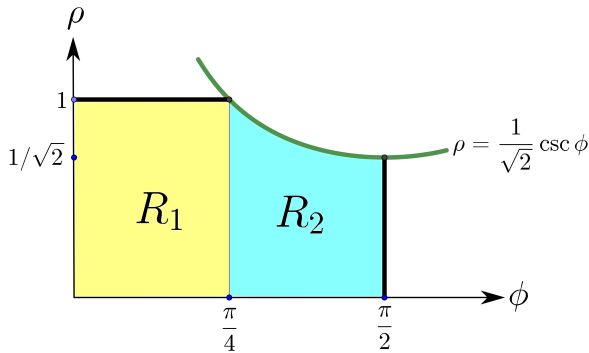


Figura 5.100: Región  $R$  de tipo 1

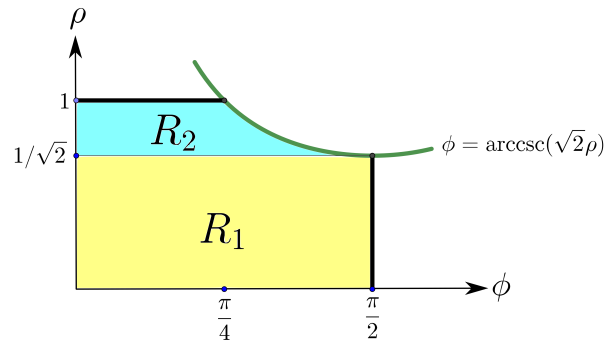


Figura 5.101: Región  $R$  de tipo 2

Entonces, al cambiar  $R$  a tipo 2 se tiene que

$$R = \begin{cases} R_1 & = \{(\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\} \\ R_2 & = \{(\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \operatorname{csc}^{-1}(\sqrt{2}\rho), \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \rho \leq 1\} \end{cases}.$$

Con lo anterior, la integral  $I$  expresada en coordenadas esféricas en el orden  $d\phi d\rho d\theta$  es

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_0^{\operatorname{csc}^{-1}(\sqrt{2}\rho)} \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta.$$

**Ejemplo 5.78** Las esferas  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$  son las fronteras interior y exterior respectivamente, del sólido  $Q$  limitado por ellas.



## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

1. Escriba una fórmula para  $V_Q$  usando integrales triples según el orden  $dx dz dy$ .
2. Escriba una fórmula para  $V_Q$  usando integrales triples con coordenadas esféricas, según el orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

### Solución:

1. En el orden  $dx dy dz$  la proyección del sólido  $Q$  está sobre el plano  $yz$ , es decir, se hace  $x = 0$  en las ecuaciones de las esferas y se procede a dibujar las regiones obtenidas, lo cual se muestra en la figura 5.102.

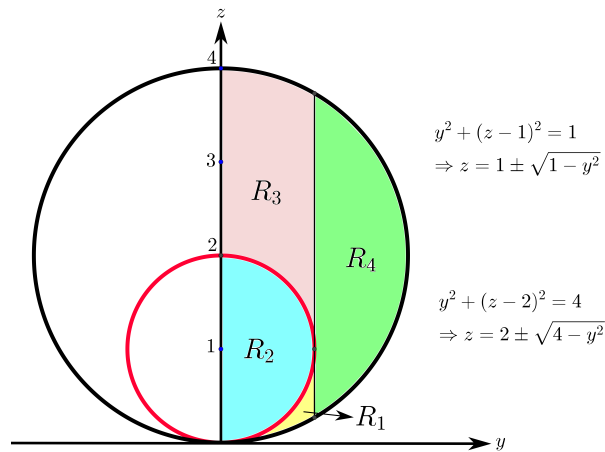


Figura 5.102: Proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $yz$

Además, si solo se considera donde  $y > 0$  y  $z > 0$ , se diferencian cuatro subregiones, las cuales se etiquetaron en el mismo dibujo. Ahora, si solo se toma cuando  $x > 0$ , el volumen de  $Q$  estaría dado por

$$V_Q = 4(V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + V_{R_4}),$$

donde  $V_{R_k}$ , para  $k = 1, 2, 3, 4$ , denota el volumen en la  $k$ -ésima región. Por otro lado, despejando  $x$  de las dos esferas dadas se tiene que

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2 - (z - 1)^2} \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{4 - y^2 - (z - 2)^2}.$$

Con los datos anteriores, una fórmula para  $V_Q$  utilizando integrales triples en el orden  $dx dz dy$  es

$$\begin{aligned} \frac{V_Q}{4} &= V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + V_{R_4} \\ &= \int_0^1 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-(z-2)^2}} dx dz dy + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-(z-2)^2}} dx dz dy \\ 0,85em &+ \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-(z-2)^2}} dx dz dy + \int_1^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-(z-2)^2}} dx dz dy. \end{aligned}$$

2. En coordenadas esféricas y en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ , primero se debe escribir  $V_Q$  en el orden usual, esto es  $\rho d\phi d\theta$ . Para ello, las esferas  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$  en coordenadas esféricas equivalen a  $\rho = 2 \cos \theta$  y  $\rho = 4 \cos \theta$  de forma respectiva. Además, se deduce que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Con lo anterior el volumen de  $Q$  está dado por la fórmula

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{2 \cos \phi}^{4 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

Luego, con el fin de pasar  $V_Q$  al orden  $d\phi d\rho d\theta$ , observe que  $\theta$  se mantiene invariante, entonces se procede a dibujar la región

$$R = \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 2 \cos \phi \leq \rho \leq 4 \cos \phi \right\}$$

en el plano  $\phi\rho$ , la cual es de tipo 1 y se debe pasar a tipo 2, según lo muestra las figuras 5.103 y 5.104 respectivamente. Luego, al escribir  $R$  como una región de tipo 2 se tendría

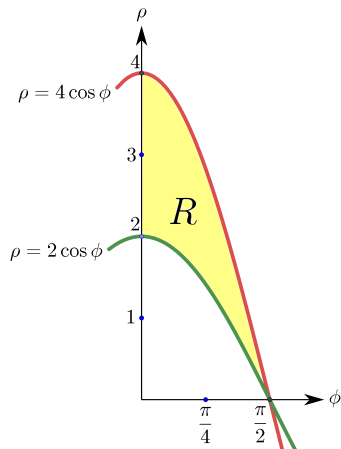


Figura 5.103: Región  $R$  de tipo 1

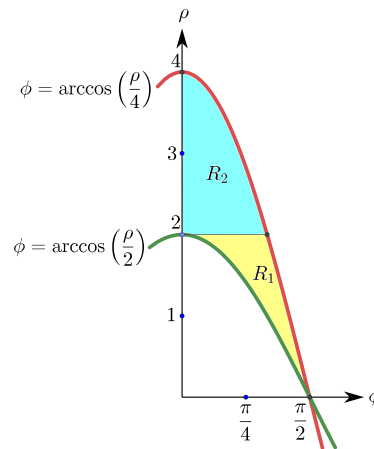


Figura 5.104: Región  $R$  de tipo 2

que

$$R = \begin{cases} R_1 &= \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \arccos\left(\frac{\rho}{2}\right) \leq \phi \leq \arccos\left(\frac{\rho}{4}\right), 0 \leq \rho \leq 2 \right\} \\ R_2 &= \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \arccos\left(\frac{\rho}{4}\right), 2 \leq \rho \leq 4 \right\} \end{cases}.$$

Entonces, una fórmula para  $V_Q$  con coordenadas esféricas según el orden  $d\phi d\rho d\theta$  es

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\arccos(\frac{\rho}{2})}^{\arccos(\frac{\rho}{4})} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\arccos(\frac{\rho}{4})} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta.$$

**Ejemplo 5.79** Considere la integral triple

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} \int_y^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz dy dx.$$

1. Realice un dibujo del sólido  $Q$  y de sus proyecciones tanto en el plano  $xy$  como en el plano  $yz$ .
2. Escriba la integral  $I$  en el orden de integración  $dx dz dy$ .
3. Escriba la integral  $I$  usando coordenadas esféricas y en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

### Solución:

1. El sólido  $Q$  está limitado por el plano  $z = y$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , acotado además por los planos coordenados  $x = 0$  y  $y = 0$ . El dibujo respectivo se observa en la figura 5.105.

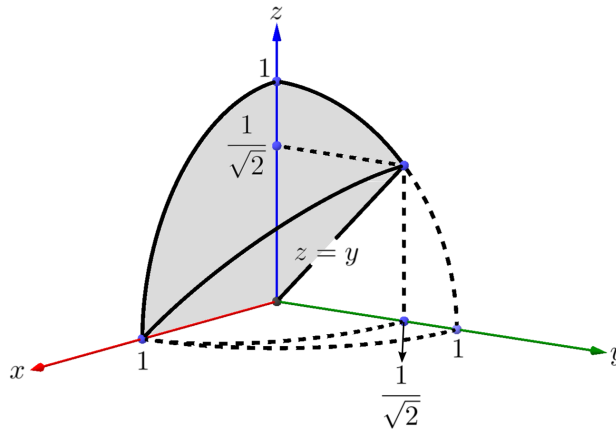


Figura 5.105: Sólido  $Q$

Además, al hacer  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$  se obtiene la elipse  $x^2 + 2y^2 = 1$ , y según el dibujo anterior, se dibujan las proyecciones de  $Q$  sobre los planos  $xy$  y  $yz$  respectivamente, las cuales se muestran en la figura 5.106.

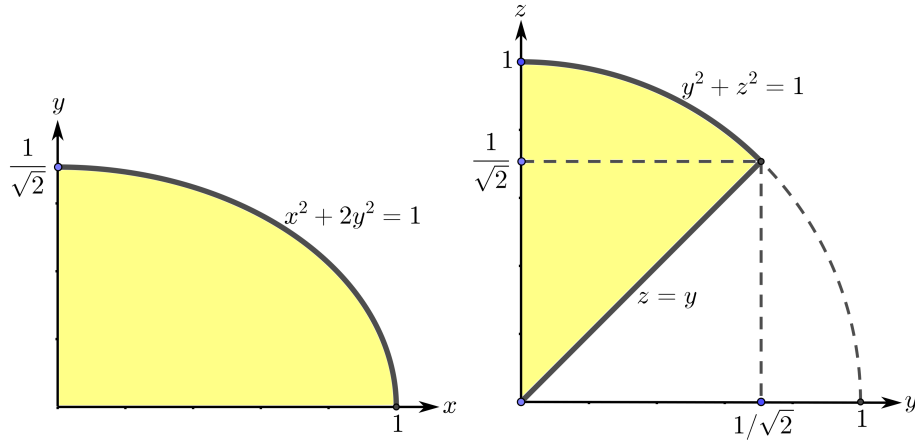


Figura 5.106: Proyecciones del sólido  $Q$  sobre los planos  $xy$  y  $yz$  respectivamente

2. De acuerdo con el dibujo de  $Q$  y su proyección sobre el plano  $yz$ , la integral  $I$  en el orden

$$dx dz dy \text{ es } I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx dz dy.$$

3. En coordenadas esféricas se tiene que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \rho \leq 1$ . Además, si  $z = y$  entonces

$$\rho \cos \phi = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\csc \theta).$$

Con lo anterior se induce que  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\arctan(\csc \theta)} \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta.$

**Ejemplo 5.80** Cambie el orden de integración de la integral triple

$$I = \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{4 \cot \phi \csc \phi}^{\cot \phi \csc \phi} f(\rho, \phi, \theta) d\rho d\phi d\theta$$

al nuevo orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

**Solución:** Según la integral  $I$  se tiene que  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$  y  $4 \cot \phi \csc \phi \leq \rho \leq$

$4 \cot \phi \csc \phi$ , lo que a su vez implica  $\frac{4 \cos \phi}{\sin^2 \phi} \leq \rho \leq \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi}$ . Al nuevo orden  $d\phi d\rho d\theta$  el ángulo  $\theta$  no cambia, así que se dibuja la región de tipo 1

$$R = \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{4 \cos \phi}{\sin^2 \phi} \leq \rho \leq \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \right\},$$

la cual se dibuja también como región de tipo 2, según se observa en la figura 5.107.

5.2. Integración en  $\mathbb{R}^3$

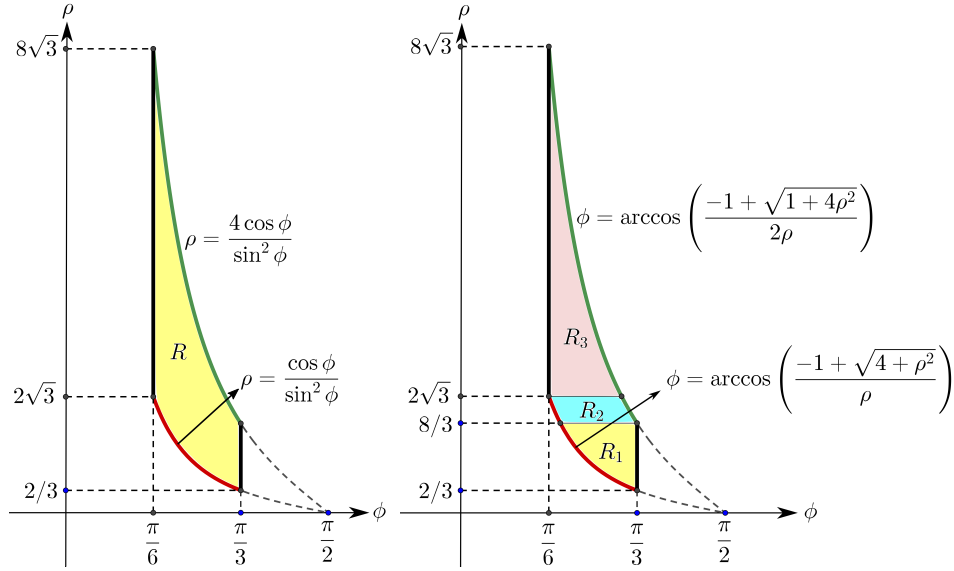


Figura 5.107: Región de tipo 1 y tipo 2 respectivamente en el plano  $\phi\rho$

Luego, como  $\rho = \frac{4 \cos \phi}{\sin^2 \phi}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4 \cos \phi}{1 - \cos^2 \phi} \\ \Rightarrow \rho - \rho \cos^2 \phi &= 4 \cos \phi \\ \Rightarrow \rho \cos^2 \phi + 4 \cos \phi - \rho &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación cuadrática se resuelve, donde el discriminante está dado por

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4\rho^2,$$

con lo cual

$$\cos \phi = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\rho^2}}{2\rho} \Rightarrow \phi = \arccos \left( \frac{-1 \pm \sqrt{4 + \rho^2}}{\rho} \right).$$

De forma análoga, si  $\rho = \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi}$ , entonces  $\phi = \arccos \left( \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\rho^2}}{2\rho} \right)$ . Con esto, la región  $R$  escrita como tipo 2 es

$$R = \begin{cases} R_1 &= \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \arccos \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\rho^2}}{2\rho} \right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3} \leq \rho \leq \frac{8}{3} \right\} \\ R_2 &= \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \arccos \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\rho^2}}{2\rho} \right) \leq \phi \leq \arccos \left( \frac{-1 + \sqrt{4 + \rho^2}}{\rho} \right), \frac{8}{3} \leq \rho \leq 2\sqrt{3} \right\} \\ R_3 &= \left\{ (\phi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \arccos \left( \frac{-1 + \sqrt{4 + \rho^2}}{\rho} \right), 2\sqrt{3} \leq \rho \leq 8\sqrt{3} \right\} \end{cases}.$$

Finalmente la integral  $I$  en el orden  $d\phi d\rho d\theta$  es

$$I = \int_0^\pi \int_{2/3}^{8/3} \int_{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\rho^2}}{2\rho}\right)}^{\pi/3} f(\rho, \phi, \theta) d\phi d\rho d\theta + \int_0^\pi \int_{8/3}^{2\sqrt{3}} \int_{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\rho^2}}{2\rho}\right)}^{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{4+\rho^2}}{\rho}\right)} f(\rho, \phi, \theta) d\phi d\rho d\theta \\ + \int_0^\pi \int_{2\sqrt{3}}^{8\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{4+\rho^2}}{\rho}\right)} f(\rho, \phi, \theta) d\phi d\rho d\theta.$$

**Ejemplo 5.81** Sea  $0 < a < b$ . Si se gira el círculo  $(x - b)^2 + z^2 = a^2$ , que está sobre el plano  $xz$ , alrededor del eje  $z$ , se obtiene el sólido de revolución  $Q$  llamado toro o dona con radio interno  $b - a$  y radio externo  $b + a$ , como lo muestra la figura 5.108.

1. Determine  $V_Q$  por medio de una integral triple en coordenadas cilíndricas en el orden  $dzdrd\theta$ .
2. Suponga que al girar el círculo  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ ,  $y = 0$ , alrededor del eje  $z$ , se obtiene el toro  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$ . Halle el volumen de este sólido utilizando una integral triple en coordenadas esféricas.

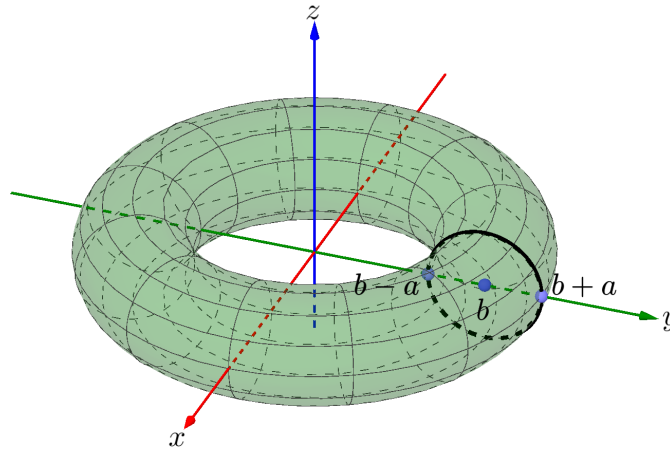
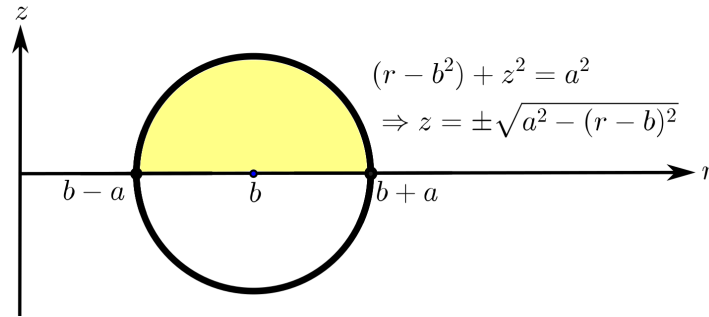


Figura 5.108: Sólido  $Q$  y las coordenadas esféricas

**Solución:**

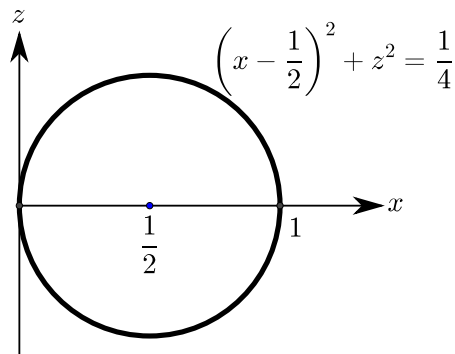
1. Para el orden  $dzdrd\theta$ , se va trabajar sobre el plano  $rz$ . Así, según la figura 5.109, se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $b - a \leq r \leq b + a$  y si se considera  $z \geq 0$ , entonces  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - (r - b)^2}$ . Con ello, la integral triple en coordenadas cilíndricas en el orden  $dzdrd\theta$  y que determina

Figura 5.109: Proyección de  $Q$  en el plano  $rz$ 

el volumen de  $Q$  es

$$\begin{aligned}
 V_Q &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{b-a}^{b+a} \int_0^{\sqrt{a^2 - (r-b)^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{b-a}^{b+a} r \sqrt{a^2 - (r-b)^2} \, dr \, d\theta, \text{ sea } r-b = a \sin t. \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos t (b + a \sin t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \, dt \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 t (b + a \sin t) \, dt \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b \cos^2 t + a \sin t \cos^2 t) \, dt \, d\theta \\
 &= a^2 b \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 2a^2 b \pi^2.
 \end{aligned}$$

2. Primero se procede a dibujar el círculo  $(x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ ,  $y = 0$ , el cual se muestra en la figura 5.110.

Figura 5.110: Círculo  $(x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$  sobre el plano  $y = 0$

Al girar este círculo alrededor del eje  $z$  se forma el toro, donde se induce que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ . La distancia  $\rho$  depende de la ecuación del toro, entonces

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= x^2 + y^2 \\ \Rightarrow (\rho^2)^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow \rho^4 &= \rho^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow \rho &= \sin \theta. \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que el volumen buscado está dado por

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sin \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\sin \phi} \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin^4 \phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \left( \frac{3}{8} \phi - \frac{3}{16} \sin 2\phi \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Para la integral  $\int \sin^4 \phi \, d\phi$ , recuerde que

$$\begin{aligned} \int \sin^4 \phi \, d\phi &= \int (\sin^2 \phi)^2 \, d\phi \\ &= \int \left( \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right)^2 \, d\phi \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2\phi + \cos^2 2\phi) \, d\phi \\ &= \frac{1}{4} \left( \int d\phi - 2 \int \cos 2\phi \, d\phi + \int \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \, d\phi \right) \\ &= \frac{3}{8} \phi - \frac{3}{16} \sin 2\phi + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.82** Transformar a coordenadas esféricas la integral

$$I = \iiint_Q f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dV,$$

donde  $Q$  está limitado por las superficies  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = y$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ .



**Solución:** Una aproximación del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 5.111. Además, se puede verificar que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Para determinar los intervalos de movimiento del ángulo  $\phi$  y de la distancia  $\rho$ , se procede a dibujar la proyección del sólido  $Q$  en el plano  $xz$ , que también se observa en la figura 5.111.

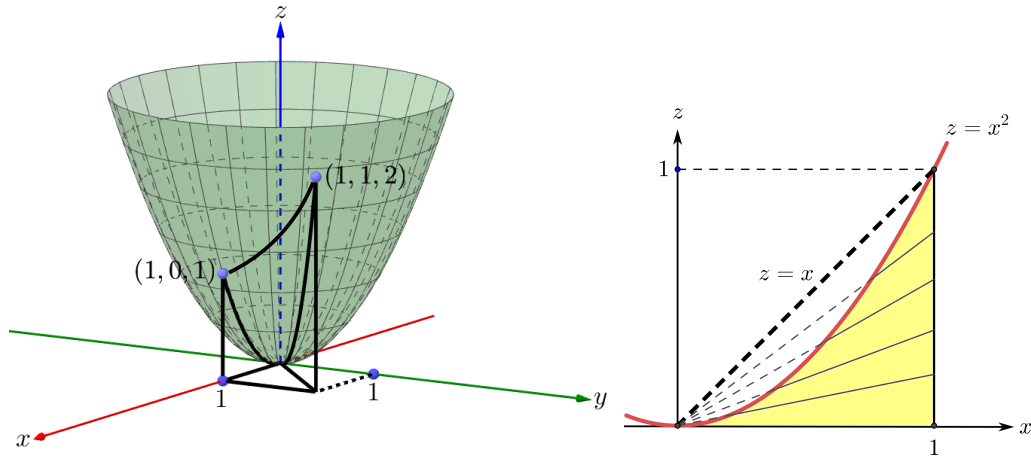


Figura 5.111: Sólido  $Q$  y su proyección en el plano  $xz$

Con lo anterior, si  $z = x$  entonces

$$\rho \cos \phi = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\sec \theta),$$

con lo cual se cumple que  $\arctan(\sec \theta) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Además, la distancia  $\rho$  varía desde del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  hasta el plano  $x = 1$ , así, de ambas ecuaciones y usando coordenadas esféricas se despeja  $\rho$  obteniendo  $\cot \phi \operatorname{csc} \phi \leq \rho \leq \operatorname{csc} \phi \sec \theta$ . Por último, la integral  $I$  en coordenadas esféricas corresponde a

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{\arctan(\sec \theta)}^{\pi/2} \int_{\cot \phi \operatorname{csc} \phi}^{\operatorname{csc} \phi \sec \theta} f(\rho) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

### 5.2.4.3. Coordenadas cilíndricas generalizadas y coordenadas esféricas generalizadas

Consiste en una generalización o modificación de las coordenadas cilíndricas o esféricas en su forma usual, por lo que el respectivo determinante del Jacobiano puede cambiar según la variación que se halla hecho. Para comprender mejor esto, observe los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5.83** Considere el cambio de variables a coordenadas cilíndricas generalizadas dada por

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad z = cz(r, \theta).$$

1. Muestre que  $|J(r, \theta, z)| = abc$ .
2. Use estas coordenadas cilíndricas generalizadas para calcular la integral triple

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dV,$$

donde  $f(x, y, z) = k \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + 1$  y  $Q$  es el sólido limitado por la superficie  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$ . **Sugerencia:** el sólido  $Q$  es simétrico a todos los planos coordenados.

**Solución:**

1. Observe que

$$|J(r, \theta, z)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \operatorname{sen} \theta & 0 \\ b \operatorname{sen} \theta & br \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

2. Usando las coordenadas cilíndricas generalizadas al sólido  $Q$  acotado por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$ , se tiene que

$$\frac{(ar \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(br \operatorname{sen} \theta)^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1 \Rightarrow r^2 + z^4 = 1,$$

de donde se deduce que  $z = \pm \sqrt[4]{1 - r^2}$ , es decir,  $-\sqrt[4]{1 - r^2} \leq z \leq \sqrt[4]{1 - r^2}$  dado que el sólido  $Q$  es simétrico de acuerdo con el plano  $z = 0$ . Además, se infiere que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , de modo que la integral  $I$  es

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \left( k \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + 1 \right) dV \\ &= abc \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt[4]{1-r^2}}^{\sqrt[4]{1-r^2}} (kr^2 + 1) r dz dr d\theta \\ &= 8abc\pi \left( \frac{4k + 9}{45} \right). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.84** Suponga que  $a > b > c > 0$ . Determine el valor de la integral triple

$$I = \iiint_Q \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$$

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

en donde  $Q$  es la parte interna del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . **Sugerencia:** utilice las coordenadas esféricas generalizadas dadas por  $x = a\rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = b\rho \sin \phi \sin \theta$  y  $z = c\rho \cos \phi$ , las cuales también se suelen llamar **coordenadas elipsoidales**.

**Solución:** El objetivo de usar las coordenadas elipsoidales es transformar el elipsoide  $Q$  en una nueva superficie  $Q'$ , la cual es una esfera de radio 1 centrada en el origen, en efecto

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{(a\rho \sin \phi \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(b\rho \sin \phi \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(c\rho \cos \phi)^2}{c^2} &= 1 \\ \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi &= 1. \end{aligned}$$

También, no es difícil verificar que  $|J(\rho, \theta, \phi)| = abc\rho^2 \sin \phi$  y notar que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ , entonces

$$I = abc \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{4abc\pi}{3}.$$

**Ejemplo 5.85** Considere el cambio de variables a coordenadas esféricas generalizadas dada por

$$x = a\rho \sin^\alpha \phi \cos^\beta \theta, \quad y = b\rho \sin^\alpha \phi \sin^\beta \theta \quad \text{y} \quad z = c\rho \cos^\alpha \phi.$$

1. Muestre que  $|J(\rho, \theta, \phi)| = abc\alpha\beta\rho^2 \cos^{\alpha-1} \phi \sin^{2\alpha-1} \phi \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\beta-1} \theta$ .
2. Utilice las coordenadas esféricas generalizadas  $x = a\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta$ ,  $y = b\rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta$  y  $z = c\rho \cos^2 \phi$  para plantear y calcular una integral triple que determine el volumen del sólido  $Q$  dada por  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{xyz}{abc}$ , en el primer octante, con  $a, b$  y  $c$  constantes positivas. .

**Solución:**

1. Note que

$$\begin{aligned}
 |J(\rho, \theta, \phi)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a \operatorname{sen}^\alpha \phi \cos^\beta \theta & -a\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen} \theta & a\alpha\rho \operatorname{sen}^{\alpha-1} \phi \cos \phi \cos^\beta \theta \\ b \operatorname{sen}^\alpha \phi \operatorname{sen}^\beta \theta & b\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta \cos \theta & b\alpha\rho \operatorname{sen}^{\alpha-1} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^\beta \theta \\ c \cos^\alpha \phi & 0 & -c\alpha\rho \cos^{\alpha-1} \phi \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\
 &= c \cos^\alpha \phi \begin{vmatrix} -a\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen} \theta & a\alpha\rho \operatorname{sen}^{\alpha-1} \phi \cos \phi \cos^\beta \theta \\ b\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta \cos \theta & b\alpha\rho \operatorname{sen}^{\alpha-1} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^\beta \theta \end{vmatrix} \\
 &+ -c\alpha\rho \cos^{\alpha-1} \phi \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} a \operatorname{sen}^\alpha \phi \cos^\beta \theta & -a\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen} \theta \\ b \operatorname{sen}^\alpha \phi \operatorname{sen}^\beta \theta & b\beta\rho \operatorname{sen}^\alpha \phi \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta \cos \theta \end{vmatrix} \\
 &= c \cos^\alpha \phi \left( -ab\alpha\beta\rho^2 \operatorname{sen}^{2\alpha-1} \phi \cos \phi \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta \right) \\
 &+ -c\alpha\rho \cos^{\alpha-1} \phi \operatorname{sen} \phi \left( ab\beta\rho \operatorname{sen}^{2\alpha} \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta \right) \\
 &= -abc\alpha\beta\rho^2 \cos^{\alpha-1} \phi \operatorname{sen}^{2\alpha-1} \phi \cos^{\beta-1} \theta \operatorname{sen}^{\beta-1} \theta,
 \end{aligned}$$

el cual se toma positivo.

2. Para desarrollar esta parte del ejemplo, y según el punto anterior, se toma  $\alpha = 2$  y  $\beta = 2$ , con lo cual se tiene que el determinante de la Matriz Jacobiana viene dado por

$$|J(\rho, \theta, \phi)| = 4abc\rho^2 \cos \phi \operatorname{sen}^3 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta.$$

Por otro lado, puesto que se trabaja en el primer octante se cumple que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ . Además, la distancia  $\rho$  depende de la ecuación del sólido  $Q$ , así

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 &= \frac{xyz}{abc} \\
 \Rightarrow \left( \frac{a\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta}{a} + \frac{b\rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta}{b} + \frac{c\rho \cos^2 \phi}{c} \right)^4 &= \rho^3 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \\
 \Rightarrow \rho^4 &= \rho^3 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \Rightarrow \rho &= \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta.
 \end{aligned}$$

De modo que la integral triple solicitada queda como

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \iiint_Q 1 \, dV \\
 &= 4abc \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \rho^2 \cos \phi \operatorname{sen}^3 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\rho d\phi d\theta \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta)^3 \cos \phi \operatorname{sen}^3 \phi \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\phi d\theta \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{15} \phi \cos^7 \phi \operatorname{sen}^7 \theta \cos^7 \theta \, d\phi d\theta \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{15} \phi \cos^7 \phi \, d\phi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 \theta \cos^7 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^{15} \phi (1 - \operatorname{sen}^2 \phi)^3) \cos \phi \, d\phi \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^7 \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^3) \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{2640} \cdot \frac{1}{280} \\
 &= \frac{4}{554400}.
 \end{aligned}$$

## Ejercicios

**Ejercicio 210** Determine el valor de las siguientes integrales:

1.  $I = \iiint_Q \frac{1}{x+y+z+1} dV$ , donde el sólido  $Q$  está limitado por los planos coordenados y el plano  $x+y+z=1$ .
2.  $I = \iiint_Q \frac{1}{1-y} dV$ , donde el sólido  $Q$  está ubicado en el primer octante y limitado por los planos  $x+y=1$ ,  $y=z$  y  $y=\frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 211** Sea  $Q$  el sólido ubicado en el primer octante y limitado por los planos  $x+z=1$  y  $y+z=1$ . Considere la integral  $I = \iiint_Q f(x,y,z) \, dV$ .

1. Escriba  $I$  en el orden  $dx dz dy$ .
2. Escriba  $I$  en el orden  $dy dz dx$ .
3. Escriba  $I$  en el orden  $dz dy dx$ .
4. Calcule solo una de las integrales planteadas anteriormente tomando  $f(x,y,z) = \frac{4}{1+(1-z)^2}$ .

**Sugerencia:** puede ayudar el hecho que  $\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ .

**Ejercicio 212** Plantee una integral triple en el orden  $dzdydx$  que permita calcular el volumen dentro del paraboloides  $x^2 + y^2 = 2az$  limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ , donde  $a$  es una constante positiva.

**Ejercicio 213** Determine el volumen del sólido  $Q$  correspondiente al cono  $x^2 + y^2 = z^2$ , limitado superiormente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ , con  $z \geq 0$ .

**Ejercicio 214** Determine el volumen del sólido  $Q$  dentro del cono  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ , limitado superiormente por la esfera  $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ .

**Ejercicio 215** Considere el sólido  $Q$  limitado por el interior del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 9$  y acotado por los planos  $x + 2y - z = 8$  y  $z = 0$ .

1. Calcule el volumen de  $Q$  por medio de una integral triple en coordenadas rectangulares en el orden  $dzdydx$ .
2. Calcule el volumen de  $Q$  por medio de una integral triple en coordenadas cilíndricas en el orden  $dzdrd\theta$ .

**Ejercicio 216** Considere el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$  y  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z$ . Sea  $I = \iiint_Q f(x, y, z) dV$ .

1. Plantee  $I$  en coordenadas cartesianas y en el orden  $dx dy dz$ ,  $dz dy dx$  y  $dy dz dx$ .
2. Plantee  $I$  en coordenadas cilíndricas y en el orden  $dz dr d\theta$  y  $dr dz d\theta$ .
3. Plantee  $I$  en coordenadas esféricas y en el orden  $d\rho d\phi d\theta$  y  $d\phi d\rho d\theta$ .

**Ejercicio 217** Considere el sólido  $Q$ , definido por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ ,  $x^2 + y^2 \geq a^2$  y  $z \geq 0$ , donde  $a \in \mathbb{R}^+$ . Determine el volumen de  $Q$  por medio de una sola integral triple en coordenadas cilíndricas.

**Ejercicio 218** Considere el sólido  $Q$  limitado por la relación  $2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Determine el volumen de  $Q$  por medio de una integral triple en coordenadas cilíndricas.

**Ejercicio 219** Calcule el valor de la integral  $I = \iiint_Q (2x^2z + 2y^2z) dV$ , siendo  $Q$  el sólido exterior al cono  $z^2 = x^2 + y^2$  e interior al cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , con  $z \geq 0$ . **Sugerencia:** las coordenadas cilíndricas pueden ayudar.

5.2. Integración en  $\mathbb{R}^3$

**Ejercicio 220** Utilice una sola integral triple en coordenadas cilíndricas para verificar que  $I = \iiint_Q (x^2 + y^2) dV = \frac{964\pi}{15}$ , donde  $Q$  es el sólido que se encuentra en el interior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  y exterior al elipsoide  $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ .

**Ejercicio 221** Use una integral triple en coordenadas cilíndricas para determinar el volumen del cuerpo sólido  $Q$ , que corresponde al interior del cilindro  $x^2 + y^2 = ax$ , limitado por el plano  $z = 0$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Ejercicio 222** Aplique una integral triple para determinar el volumen del sólido  $Q$  encerrado por las superficies  $z = 5x^2 + 5y^2$  y  $z = 6 - 7x^2 - y^2$ . **Sugerencia:** puede usar coordenadas cilíndricas generalizadas.

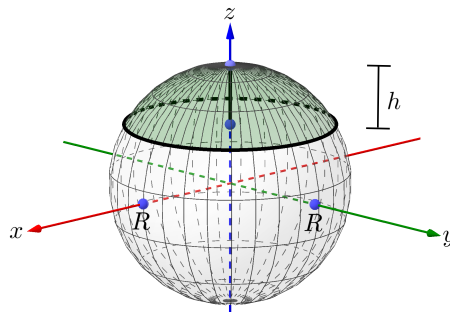
**Ejercicio 223** Considere el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z = 3 - x^2 - y^2$ .

1. Use una integral triple en coordenadas cilíndricas para determinar el volumen de  $Q$ .
2. Plantee una integral triple en coordenadas esféricas que permita determinar el volumen de  $Q$ .

**Ejercicio 224** Considere la integral  $I = \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , donde  $Q$  es el sólido limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , entre los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .

1. Determine el valor de  $I$  utilizando coordenadas cilíndricas.
2. Determine el valor de  $I$  utilizando coordenadas esféricas.

**Ejercicio 225** Considere la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , de la cual se corta un casquete de altura  $h$ , con  $h < R$ , como lo muestra la siguiente figura.



1. Plantee una integral triple en coordenadas cilíndricas en el orden  $dzdrd\theta$  que permita calcular el volumen de dicho casquete.
2. Plantee una integral triple en coordenadas esféricas en el orden  $d\rho d\phi d\theta$  que permita calcular el volumen de dicho casquete.

**Ejercicio 226** Considere la integral triple  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r dzdrd\theta$  en coordenadas cilíndricas que determina el volumen de un sólido  $Q$ .

1. Dibuje el sólido  $Q$ .
2. Exprese dicha integral triple en coordenadas esféricas, en el orden  $d\rho d\phi d\theta$ .
3. Exprese dicha integral triple en coordenadas esféricas, en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

**Ejercicio 227** Sea  $Q$  el sólido limitado inferiormente por el paraboloides  $az = x^2 + y^2$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ , con  $a \in \mathbb{R}^+$ . Plantee la integral triple  $I = \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) dV$  usando coordenadas esféricas en el orden  $d\phi d\rho d\theta$ .

**Ejercicio 228** Sea  $Q$  el sólido que se encuentra por debajo del plano  $z = 1$  y en el interior del paraboloides  $z = x^2 + y^2$ . Plantee una integral triple en coordenadas esféricas que permita calcular el volumen del sólido  $Q$ .

**Ejercicio 229** Calcular la integral  $I = \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ , donde  $Q$  es la región del espacio limitada por  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ . **Sugerencia:** use coordenadas esféricas.

**Ejercicio 230** Calcular la integral  $I = \iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$  usando coordenadas esféricas, donde  $Q$  es el sólido dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  y fuera de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ .

**Ejercicio 231** Use una integral triple en coordenadas esféricas para calcular  $I = \iiint_Q z^2 dV$ , donde  $Q$  es el sólido limitado por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ .

**Ejercicio 232** Utilice una integral triple en coordenadas esféricas para calcular

$$I = \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV,$$



## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

donde  $Q$  es el sólido limitado por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $3z^2 \geq x^2 + y^2$  y  $z \geq 0$ , donde  $a$  es una constante positiva.

**Ejercicio 233** Use una integral triple en coordenadas esféricas para calcular  $I = \iiint_Q z \, dV$ , donde  $Q$  es el interior de la esfera  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ , exterior al cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e interior al cono  $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Ejercicio 234** Use coordenadas esféricas para calcular  $I = \iiint_Q \frac{x^2 + y^2}{z^2} \, dV$ , donde  $Q$  es el sólido limitado por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ .

**Ejercicio 235** Determine el volumen del sólido limitado por la superficie

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h},$$

con  $a, b, c$  y  $h$  constantes positivas, aplicando coordenadas esféricas generalizadas. Para establecer los límites de  $\theta$ , note que  $x \geq 0$ .

Para los siguientes ejercicios debe aplicar la teoría expuesta a continuación: sea  $Q$  un cuerpo sólido cuya función densidad es  $w = f(x, y, z)$  en cada punto  $(x, y, z)$ , se define:

1. La masa total  $M$  del cuerpo sólido  $Q$  como  $M = \iiint_Q f(x, y, z) \, dV$ .
2. La masa respecto a los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$  corresponde a  $M_{xy} = \iiint_Q z f(x, y, z) \, dV$ ,  $M_{xz} = \iiint_Q y f(x, y, z) \, dV$  y  $M_{yz} = \iiint_Q x f(x, y, z) \, dV$ , de forma respectiva.
3. Las coordenadas del centro de masa (o centro de gravedad) son  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , tales que  $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ ,  $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}$  y  $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ . Si la función densidad  $w = f(x, y, z)$  del cuerpo sólido  $Q$  es constante, el centro de masa suele recibir el nombre de centroide. Es importante mencionar que, de forma intuitiva, el centro de masa es el único punto donde se puede equilibrar perfectamente el cuerpo sólido  $Q$ , suponiendo que este cuelga de un cable imaginario anclado en ese punto.
4. El momento de inercia  $I_{xy}$  respecto al plano  $xy$  por  $I_{xy} = \iiint_Q z^2 f(x, y, z) \, dV$ . Similarmente se definen las fórmulas para  $I_{yz}$  y  $I_{zx}$ , esto es  $I_{xz} = \iiint_Q y^2 f(x, y, z) \, dV$  y  $I_{yz} = \iiint_Q x^2 f(x, y, z) \, dV$ , de forma respectiva.

5. Los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados como:

$$\blacksquare I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint_Q (y^2 + z^2) f(x, y, z) dV.$$

$$\blacksquare I_y = I_{yx} + I_{yz} = \iiint_Q (x^2 + z^2) f(x, y, z) dV.$$

$$\blacksquare I_z = I_{zx} + I_{zy} = \iiint_Q (x^2 + y^2) f(x, y, z) dV.$$

6. El momento polar de inercia como  $I_0 = \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) f(x, y, z) dV$ .

**Ejercicio 236** Calcule por integración triple la masa del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $x = y^2$ ,  $z = 0$  y  $x + z = 1$ , suponiendo que la función densidad es  $f(x, y, z) = 1$ . Luego, encuentre el centroide de  $Q$ .

**Ejercicio 237** Encuentre el centroide de la parte del primer octante limitada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  con la función densidad constante igual a 1.

**Ejercicio 238** Halle el centroide del cuerpo sólido  $Q$ , limitado por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 1$ . En este caso la densidad es constante en cada punto de  $Q$ .

**Ejercicio 239** Determinar el centro de masa del sólido  $Q$  encerrado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , acotado arriba por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y abajo por el plano  $xy$ , suponiendo que la función densidad es constante e igual a 1.

**Ejercicio 240** Calcule el centroide del sólido  $Q$  limitado por  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con  $z \geq 0$ , donde la densidad es constante.

**Ejercicio 241** Sea el sólido  $Q$  acotado por  $x = y^2$  y los planos  $z = 0$  y  $z = 1 - x$ . Suponga que la función densidad es  $f(x, y, z) = y$  en cada punto  $(x, y, z)$  de  $Q$ . Calcule el centro de masa.

**Ejercicio 242** Considere el sólido  $Q$  comprendido entre los planos  $z = 0$  y  $z = 1 - y$ , y dentro de la superficie  $x^2 + 4y^2 = 4$ . Suponga que la función densidad viene dada por  $f(x, y, z) = 2z$ . Determine:

1. La masa de  $Q$ .
2. La masa con respecto a cada plano.
3. El centro de masa de  $Q$ .

## 5.2. Integración en $\mathbb{R}^3$

4. Los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados.
5. El momento polar de inercia.

**Ejercicio 243** Sea el sólido  $Q$  comprendido entre los paraboloides de ecuación  $\frac{z}{4} = x^2 + y^2$ ,  $\frac{8-z}{4} = x^2 + y^2$ . Suponga que la función densidad es  $f(x, y, z) = x + y + z + 1$ . Determine:

1. La masa de  $Q$ .
2. La masa con respecto a cada plano.
3. El centro de masa de  $Q$ .
4. Los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados.
5. El momento polar de inercia.

**Ejercicio 244** Halle el momento de inercia respecto al eje  $z$  del sólido limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Ejercicio 245** Calcule el momento de inercia de un cubo con densidad constante igual a  $k$ , de lado  $a$ , respecto a una de sus aristas. **Sugerencia:** defina el cubo como  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$  y calcule el momento de inercia respecto a cualquiera de los ejes.

**Ejercicio 246** Determine el momento de inercia de un paralelepípedo con densidad constante igual a  $k$ , de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , con respecto cada uno de sus lados.

**Ejercicio 247** Se tiene una región sólida  $Q$  que se encuentra al exterior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ,  $b > a$ , suponiendo que la densidad de un punto es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de  $P(x, y, z)$  al centro de las esferas.

1. Calcule la masa del sólido  $Q$ .
2. Calcule el momento de inercia respecto al eje  $z$ .

# Capítulo 6

## Análisis Vectorial

En el capítulo 3 se definió una función de varias variables, donde si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto, en particular se tiene que:

1. Una función  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina un campo escalar sobre  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .
2. Una función  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se denomina un campo vectorial sobre  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Observación 6.1** De lo anterior se establece lo siguiente:

1. Un campo vectorial definido sobre una región  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  del plano es una función vectorial  $F : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que asocia a cada punto  $(x, y)$  de  $R$  el vector  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , donde  $f_i$  es un campo escalar sobre  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  para  $i = 1, 2$ .
2. Un campo vectorial definido sobre una región  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$  del espacio es una función vectorial  $F : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que asocia a cada punto  $(x, y, z)$  de  $Q$  el vector  $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ , donde  $f_i$  es un campo escalar sobre  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Ejemplo 6.1** Las siguientes funciones son campos vectoriales:

1.  $F : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$  es un campo vectorial sobre  $R$ , donde  $R = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .
2.  $F : Q \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z}, x\sqrt{1-z}, 0)$  es un campo vectorial sobre  $Q$ , donde  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1\}$ .
3.  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (\cos x, -\cos y \sin x, \cos y)$  es un campo vectorial sobre  $\mathbb{R}^3$ .

## 6.1. Visualización de un campo vectorial

Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial (con  $n = 2, 3$ ),  $U$  un conjunto abierto, la forma de visualizar el campo vectorial  $F$  es asignándole a cada punto  $X \in U$  el vector  $F(X)$  con punto inicial  $X$ .

**Ejemplo 6.2** Gráficamente el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $F(x, y) = (x, y)$ , se representa en la figura 6.1.

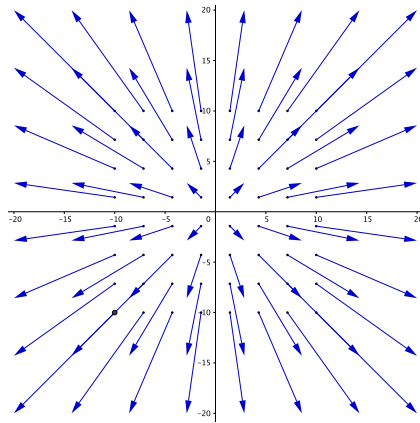


Figura 6.1: Campo vectorial  $F(x, y) = (x, y)$

**Ejemplo 6.3** Gráficamente el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $F(x, y) = (3x, 3y)$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , se representa en la figura 6.2.

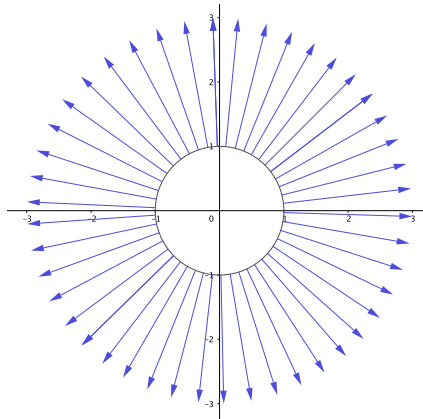


Figura 6.2: Campo vectorial  $F(x, y) = (3x, 3y)$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 1$

**Ejemplo 6.4** Gráficamente el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $F(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z}, x\sqrt{1-z}, 0)$  sobre la superficie  $z = 1 - x^2 - y^2$ , se representa en la figura 6.3.

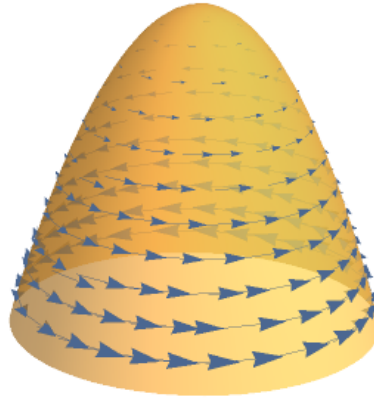


Figura 6.3: Campo vectorial  $F(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z}, x\sqrt{1-z}, 0)$  sobre la superficie  $z = 1 - x^2 - y^2$

## 6.2. Campo vectorial gradiente

**Definición 6.1** (Campo vectorial gradiente) Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función con todas sus derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto abierto  $U$ , se define el campo vectorial gradiente sobre  $\mathbb{R}^n$  asociado a  $f$  como la función  $\nabla f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right).$$

**Observación 6.2** Los siguientes son casos particulares del campo vectorial gradiente:

1. Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto abierto  $U$ , entonces el campo vectorial gradiente sobre  $\mathbb{R}^2$  asociado a  $f$  es

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

2. Si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto abierto  $U$ , entonces el campo vectorial gradiente sobre  $\mathbb{R}^3$  asociado a  $f$  es

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

**Ejemplo 6.5** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones con todas sus derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto abierto  $U$  y sea  $a \in \mathbb{R}$ . Muestre que  $\nabla(f + ag)(x) = \nabla f(x) + a\nabla g(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Solución:** Con esta propiedad se va mostrar la linealidad del vector gradiente.

$$\begin{aligned}
 \nabla(f + ag)(x) &= \left( \frac{\partial(f + ag)(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f + ag)(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(ag)(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial(ag)(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + a \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + a \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) + \left( a \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, a \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) + a \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \nabla f(x) + a\nabla g(x).
 \end{aligned}$$

**Observación 6.3** Del ejemplo anterior se puede ver a  $\nabla$  como un operador lineal diferencial vectorial, definido por  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

**Ejemplo 6.6** Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones con todas sus derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto abierto  $U$  y sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Muestre que  $\nabla(fg)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 \nabla(fg)(x) &= \left( \frac{\partial(fg)(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(fg)(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= \left( g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) + \left( f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= g(x) \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) + f(x) \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \\
 &= g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x).
 \end{aligned}$$

**Definición 6.2 (Divergencia de un campo vectorial)** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial tal que sus derivadas parciales de primer orden existen. Entonces se define la

divergencia de  $F$  como la función  $div F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$div F = \nabla \cdot F.$$

**Observación 6.4** De la definición anterior se tienen los siguientes dos casos particulares:

1. Si  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , entonces

$$\begin{aligned} div F &= \nabla \cdot F \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (f_1, f_2) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

2. Si  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ , entonces

$$\begin{aligned} div F &= \nabla \cdot F \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f_1, f_2, f_3) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.7** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = (xe^y, z \sen y, xy \ln z^2)$ . Determine  $div F$ .

**Solución:** En este caso  $f_1(x, y, z) = xe^y$ ,  $f_2(x, y, z) = z \sen y$  y  $f_3(x, y, z) = xy \ln z^2$ .

Así se tiene que

$$div F = e^y + z \cos y + \frac{2xy}{z}.$$

**Teorema 6.1** Sean  $F, G : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vectoriales definidos sobre un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar definido sobre el mismo conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces

1.  $div (aF + bG) = a \cdot div F + b \cdot div G$ .

2.  $div (fF) = f \cdot div F + F \cdot (\nabla f)$ .

**Definición 6.3 (Rotacional de un campo vectorial)** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial tal que sus derivadas parciales de primer orden existen. Entonces se define el rotacional de  $F$



## 6.2. Campo vectorial gradiente

como la función  $rot F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$rot F = \nabla \times F.$$

**Observación 6.5** De la definición anterior se construye la siguiente fórmula del rotacional de un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ .

$$\begin{aligned} rot F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f_1, f_2, f_3) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.8** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $F(x, y, z) = (x^2, x + y, 2xz^2)$ . Determine  $rot F$ .

**Solución:** Tome  $f_1(x, y, z) = x^2$ ,  $f_2(x, y, z) = x + y$  y  $f_3(x, y, z) = 2xz^2$ . Según la fórmula obtenida en la observación 6.5 anterior se tiene que:

$$rot F = (0 - 0, 0 - 2z^2, 1 - 0) = (0, -2z^2, 1).$$

**Definición 6.4 (Campo vectorial irrotacional)** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial tal que sus derivadas parciales de primer orden existen. Se dice que  $F$  es un campo vectorial irrotacional, o simplemente irrotacional, si  $rot F = (0, 0, 0)$ .

**Ejemplo 6.9** Verifique que el campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$  es irrotacional.

**Solución:** Defina  $f_1(x, y, z) = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2z - 4xy$  y  $f_3(x, y, z) = x^2y + 2xz - 2$ . Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned} rot F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (x^2 - x^2, 2xy + 2z - 2xy - 2z, 2xz - 4y - 2xz + 4y) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que  $F$  es irrotacional.

**Ejemplo 6.10** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (yz \cos(xyz), xz \cos(xyz), xy \cos(xyz))$ , verifique que  $F$  es irrotacional.

**Solución:** Defina  $f_1(x, y, z) = yz \cos(xyz)$ ,  $f_2(x, y, z) = xz \cos(xyz)$  y  $f_3(x, y, z) = xy \cos(xyz)$ .

Con ello se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (x \cos(xyz) - x^2 y z \operatorname{sen}(xyz) - x \cos(xyz) + x^2 y z \operatorname{sen}(xyz), y \cos(xyz) \\ &\quad - x y^2 z \operatorname{sen}(xyz) - y \cos(xyz) + x y^2 z \operatorname{sen}(xyz), z \cos(xyz) - x y z^2 \operatorname{sen}(xyz) \\ &\quad - z \cos(xyz) + x y z^2 \operatorname{sen}(xyz)) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Por tanto  $F$  es un campo vectorial irrotacional.

**Ejemplo 6.11** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función con sus derivadas parciales de segundo orden continuas. Muestre que el campo vectorial gradiente de  $f$  es irrotacional.

**Solución:** Lo que se debe probar es que  $\operatorname{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$ , esto es:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) &= \nabla \times \nabla f \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}. \\ &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

esto pues las derivadas parciales de segundo orden cruzadas son iguales por ser continuas.

## 6.3. Campo vectorial conservativo

**Definición 6.5 (Campo vectorial conservativo)** Un campo vectorial  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  abierto, es conservativo si existe una función escalar  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F = \nabla f.$$

En tal caso  $f$  se llama **función potencial** de  $F$ <sup>1</sup>.

**Observación 6.6** Según el ejemplo 6.11 y la definición anterior 6.5 se tiene que un **campo vectorial conservativo**  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  siempre es irrotacional.

**Ejemplo 6.12** Verifique que  $F(x, y, z) = (2x + yz, 2y + xz, xy)$  es conservativo determinando su función potencial.

**Solución:** Tome  $f_1(x, y, z) = 2x + yz$ ,  $f_2(x, y, z) = 2y + xz$  y  $f_3(x, y, z) = xy$ , así  $F = (f_1, f_2, f_3)$ . Luego, para probar que  $F$  es un campo vectorial conservativo usando la definición 6.5 debe existir una función escalar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (llamada **función potencial**) tal que

$$\begin{aligned} F &= \nabla f \\ \Rightarrow (f_1, f_2, f_3) &= (f_x, f_y, f_z) \\ \Rightarrow (2x + yz, 2y + xz, xy) &= (f_x, f_y, f_z). \end{aligned}$$

De aquí se forma el sistema siguiente de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 2x + yz & (1) \\ f_y(x, y, z) = 2y + xz & (2) \\ f_z(x, y, z) = xy & (3) \end{cases}$$

Del sistema anterior se procede a escoger cualquiera de las tres ecuaciones. En particular se va seleccionar la ecuación (3), la cual se integra con respecto a la variable  $z$ , y se obtiene

$$f(x, y, z) = xyz + m(x, y) \quad (4),$$

donde  $m(x, y)$  es una constante con respecto a  $z$ . Ahora, derive (4) con respecto a  $x$ , para obtener

$$f_x(x, y, z) = yz + m_x(x, y),$$

---

<sup>1</sup>En otras palabras, el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es conservativo si él mismo es un campo vectorial gradiente de una función escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

la cual se iguala a la ecuación (1), esto es:

$$yz + m_x(x, y) = 2x + yz,$$

de donde se deduce que  $m_x(x, y) = 2x$ . Integrando con respecto a  $x$  se tiene que

$$m(x, y) = x^2 + n(y),$$

siendo  $n(y)$  una constante con respecto a la variable  $x$  y  $z$ . Este último resultado se cambia en (4), como sigue:

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + n(y). \quad (5)$$

De forma similar al proceso anterior, derive (5) con respecto a  $y$ , y se obtiene

$$f_y(x, y, z) = xz + n_y(y),$$

cuyo resultado se iguala a (2), esto es

$$xz + n_y(y) = 2y + xz,$$

entonces  $n_y(y) = 2y$ . Luego, integrando esta última igualdad con respecto a  $y$  se obtiene que  $n(y) = y^2 + K$ , donde  $K \in \mathbb{R}$ . Finalmente, se cambia esto último en (5), obteniendo la función potencial de  $F$  dada por

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + K.$$

Para verificar la correcta resolución del ejemplo, observe que en efecto se cumple que

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + yz, 2y + xz, xy) = F(x, y, z).$$

Entonces  $F$  es un campo vectorial conservativo.

**Ejemplo 6.13** Considere el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ .

1. Verifique que  $F$  es conservativo hallando su función potencial.
2. Compruebe que  $F$  es un campo vectorial irrotacional.

### Solución:

1. Sea  $F = (f_1, f_2, f_3)$  tal que  $f_1(x, y, z) = e^x \cos y + yz$ ,  $f_2(x, y, z) = xz - e^x \operatorname{sen} y$  y  $f_3(x, y, z) = xy + z$ . Luego, por la definición 6.5,  $F$  es conservativo si existe la función

### 6.3. Campo vectorial conservativo

potencial  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} F &= \nabla f \\ \Rightarrow (f_1, f_2, f_3) &= (f_x, f_y, f_z) \\ \Rightarrow (e^x \cos y + yz, xz - e^x \operatorname{sen} y, xy + z) &= (f_x, f_y, f_z), \end{aligned}$$

de donde se forma el sistema siguiente de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = e^x \cos y + yz & (1) \\ f_y(x, y, z) = xz - e^x \operatorname{sen} y & (2) \\ f_z(x, y, z) = xy + z & (3) \end{cases}$$

Del sistema anterior se selecciona cualquiera de las tres ecuaciones. En particular se va escoger la ecuación (1) y se integra con respecto a la variable  $x$ , obteniendo

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + m(y, z) \quad (4),$$

donde  $m(y, z)$  es una constante con respecto a  $x$ . Ahora, derive (4) con respecto a  $y$ , para obtener

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y + xz + m_y(y, z),$$

la cual se iguala a la ecuación (2), esto es:

$$-e^x \operatorname{sen} y + xz + m_y(y, z) = xz - e^x \operatorname{sen} y,$$

donde se deduce que  $m_y(y, z) = 0$ . Integrando con respecto a  $y$  se tiene que

$$m(y, z) = K_1 + n(z)$$

siendo  $K_1$  una constante real y  $n(z)$  una constante con respecto a la variable  $x$  y  $y$ . Este último resultado se cambia en (4), como sigue:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + K_1 + n(z). \quad (5)$$

De forma parecida al proceso anterior, derive (5) con respecto a  $z$ , y se obtiene

$$f_z(x, y, z) = xy + n_z(z),$$

cuyo resultado se iguala a (3), esto es

$$xy + n_z(z) = xy + z,$$

entonces  $n_z(z) = z$ . Luego, integrando esta última igualdad con respecto a  $z$  se obtiene que  $n(z) = \frac{z^2}{2} + K_2$ , donde  $K_2 \in \mathbb{R}$ . Finalmente, se cambia esto último en (5), obteniendo la función potencial de  $F$  dada por

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + K_1 + K_2 = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + K,$$

con  $K \in \mathbb{R}$ . Para verificar la correcta resolución del ejemplo, observe que en efecto se verifica que

$$\nabla f(x, y, z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z) = F(x, y, z).$$

2. Al ser  $F = (f_1, f_2, f_3)$  tal que  $f_1(x, y, z) = e^x \cos y + yz$ ,  $f_2(x, y, z) = xz - e^x \sin y$  y  $f_3(x, y, z) = xy + z$ , con ello note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (x - x, y - y, -e^x \sin z + e^x \sin z) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces  $F$  es irrotacional.

**Teorema 6.2** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  un campo vectorial tal que sus derivadas parciales de primer orden existen en el conjunto abierto  $U$ , una condición necesaria para que  $F$  sea conservativo es que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \text{para todo } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ con } i \neq j.$$

**Observación 6.7** Algunos casos particulares del teorema anterior son:

1. Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $F = (f_1, f_2)$  un campo vectorial con sus derivadas parciales de primer orden en el conjunto abierto  $U$ , entonces una condición necesaria para que  $F$  sea conservativo es

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

2. Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F = (f_1, f_2, f_3)$  un campo vectorial con sus derivadas parciales de primer orden en el conjunto abierto  $U$ , entonces una condición necesaria para que  $F$  sea

### 6.3. Campo vectorial conservativo

conservativo es

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}.$$

Es este caso note que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

3. Según el punto anterior y la observación 6.6, se tendría que un condición necesaria para que un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F = (f_1, f_2, f_3)$  sea conservativo es que  $F$  sea irrotacional.

**Ejemplo 6.14** Verifique si el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(x, y) = (2x + y, -x + 4y)$  es un campo vectorial conservativo.

**Solución:** Defina  $f_1(x, y) = 2x + y$  y  $f_2(x, y) = -x + 4y$ , ambas con derivadas parciales continuas. De acuerdo con el primer punto de la observación 6.7, para que  $F$  pueda ser conservativo debe cumplir que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Sin embargo, note que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$  y  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -1$ , es decir, son diferentes. Por lo tanto el campo vectorial  $F$  dado no es conservativo.

**Ejemplo 6.15** Verifique si  $F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$  cumple la condición necesaria para que sea un campo vectorial conservativo. En caso que la cumpla, halle su función potencial.

**Solución:** Sean  $f_1(x, y) = 2x + y^3$  y  $f_2(x, y) = 3xy^2 + 4$ , ambas con derivadas parciales continuas. Según el primer punto de la observación 6.7, una condición necesaria para que  $F$  sea conservativo es verificar que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

En efecto, note que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3y^2$  y  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3y^2$ . Por lo tanto el campo vectorial  $F$  cumple con dicha condición. Para hallar su función potencial  $f$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= \nabla f \\ \Rightarrow (f_1, f_2) &= (f_x, f_y) \\ \Rightarrow (2x + y^3, 3xy^2 + 4) &= (f_x, f_y). \end{aligned}$$

De aquí se forma el sistema siguiente de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x + y^3 & (1) \\ f_y(x, y) = 3xy^2 + 4 & (2) \end{cases}$$

Del sistema anterior se escoge cualquiera de las tres ecuaciones. En particular seleccione la ecuación (1), que se integra con respecto a la variable  $x$ , y se obtiene

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + m(y) \quad (4),$$

donde  $m(y)$  es una constante con respecto a  $x$ . Ahora, derive (4) con respecto a  $y$ , para obtener

$$f_y(x, y) = 3xy^2 + m_y(y),$$

la cual se iguala a la ecuación (2), esto es:

$$3xy^2 + m_y(y) = 3xy^2 + 4,$$

de donde se deduce que  $m_y(y) = 4$ . Integrando con respecto a  $y$  se tiene que

$$m(y) = 4y + K,$$

siendo  $K$  una constante real. Este último resultado se cambia en (4) para obtener la función potencial de  $F$ , como sigue:

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + K, \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Fácilmente se verifica que realmente  $F = \nabla f$ .

**Ejemplo 6.16** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (axz, -1 - bz^2, x^2 - 2yz + 4)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1. Determine los valores de  $a$  y  $b$  para que  $F$  cumpla con la condición necesaria para ser conservativo.



### 6.3. Campo vectorial conservativo

2. Para los valores  $a$  y  $b$  calculados en el punto anterior, calcule  $f$  tal que  $\nabla f = F$ .

**Solución:** Para la primera parte, por el tercer punto de la observación 6.7, lo que se debe hacer es hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $F$  sea irrotacional. Con este fin, defina  $f_1(x, y, z) = axz$ ,  $f_2(x, y, z) = -1 - bz^2$  y  $f_3(x, y, z) = x^2 - 2yz + 4$ , con ello note que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (-2z + 2bz, -2x + ax, 0). \end{aligned}$$

Como  $F$  debe ser irrotacional entonces  $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$ , es decir

$$(-2z - 2bz, -2x + ax, 0) = (0, 0, 0),$$

de donde se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2z + 2bz = 0 \\ -2x + ax = 0 \end{cases}$$

De dicho sistema se obtiene que  $a = 2$  y  $b = 1$ . De esta forma el campo vectorial  $F$  es irrotacional. Para la segunda parte del ejemplo, donde se solicita la función potencial del campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (2xz, -1 - z^2, x^2 - 2yz + 4)$ , y en referencia a los ejemplos anteriores, se forma el sistema siguiente de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 2xz & (1) \\ f_y(x, y, z) = -1 - z^2 & (2) \\ f_z(x, y, z) = x^2 - 2yz + 4 & (3) \end{cases}$$

Del sistema anterior se selecciona cualquiera de las tres ecuaciones. En particular se escoge la ecuación (1) y se integra con respecto a la variable  $x$ , obteniendo

$$f(x, y, z) = x^2z + m(y, z) \quad (4),$$

donde  $m(y, z)$  es una constante con respecto a  $x$ . Ahora, derive (4) con respecto a  $y$ , para obtener

$$f_y(x, y, z) = m_y(y, z),$$

la cual se iguala a la ecuación (2), esto es:

$$m_y(y, z) = -1 - z^2.$$

Integrando con respecto a  $y$  se tiene que

$$m(y, z) = -y - yz^2 + n(z),$$

siendo  $n(z)$  una constante con respecto a la variable  $x$  y  $y$ . Este último resultado se cambia en (4), como sigue:

$$f(x, y, z) = x^2z - y - yz^2 + n(z). \quad (5)$$

De forma similar al proceso anterior, derive (5) con respecto a  $z$ , y se obtiene

$$f_z(x, y, z) = x^2 - 2yz + n_z(z),$$

cuyo resultado se iguala a (3), esto es

$$x^2 - 2yz + n_z(z) = x^2 - 2yz + 4,$$

entonces  $n_z(z) = 4$ . Luego, integrando esta última igualdad con respecto a  $z$  se obtiene que  $n(z) = 4z + K$ , donde  $K \in \mathbb{R}$ . Finalmente, se cambia esto último en (5), obteniendo la función potencial de  $F$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2z - y - yz^2 + 4z + K,$$

con  $K \in \mathbb{R}$ . Para verificar la correcta resolución note que en efecto se cumple que

$$\nabla f(x, y, z) = (2xz, -1 - z^2, x^2 - 2yz + 4) = F(x, y, z).$$

**Observación 6.8** Suponga que  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  es un campo vectorial conservativo sobre el conjunto abierto  $U$ , un método alternativo para construir la función potencial de  $f$  es el siguiente:

1. Seleccione una sola variable  $x_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Si  $i = 1$ , la función potencial viene dada por

$$f = \int f_1 dx_1 + \int f_2 dx_2 + \dots + \int f_n dx_n,$$

donde para  $i = 2, 3, \dots, n$  en  $f_i$  se deben desaparecer los términos que contengan las variables  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ .

3. Si  $i = n$ , la función potencial viene dada por

$$f = \int f_n dx_n + \int f_1 dx_1 + \int f_2 dx_2 + \dots + \int f_{n-1} dx_{n-1},$$

### 6.3. Campo vectorial conservativo

donde en  $f_1$  se deben desaparecer los términos que tengan  $x_n$  y para  $i = 2, \dots, n-1$  en  $f_i$  se deben desaparecer los términos que contengan las variables  $x_n, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ .

4. Si  $i = k$ , con  $0 < k < n$ , la función potencial viene dada por

$$f = \int f_k dx_k + \int f_1 dx_1 + \int f_2 dx_2 + \dots + \int f_{k-1} dx_{k-1} + \int f_{k+1} dx_{k+1} + \dots + \int f_n dx_n,$$

donde en  $f_1$  se deben desaparecer los términos que tengan  $x_k$  y para  $i = 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n$  en  $f_i$  se deben desaparecer los términos que contengan las variables  $x_k, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ .

**Ejemplo 6.17** Considere el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ . Verifique que  $F$  cumple con la condición necesaria para ser conservativo y halle su función potencial mediante el método descrito anteriormente.

**Solución:** Note que es el mismo ejemplo 6.13. Es claro que  $F$  posee todas sus derivadas parciales de primer orden continuas y además se verifica que es irrotacional (ver ejemplo 6.13), así  $F$  cumple con la condición necesaria para ser conservativo. Defina  $F = (f_1, f_2, f_3)$  tal que  $f_1(x, y, z) = e^x \cos y + yz$ ,  $f_2(x, y, z) = xz - e^x \sin y$  y  $f_3(x, y, z) = xy + z$ . Se va a calcular la función potencial de tres formas diferentes<sup>2</sup>.

1. Considere la variable  $x$ , entonces la función potencial es

$$f(x, y, z) = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz,$$

donde para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variable  $x$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con la variables  $x$  y  $y$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int (e^x \cos y + yz) dx + \int 0 dy + \int z dz \\ &= e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Considere la variable  $y$ , entonces la función potencial es

$$f(x, y, z) = \int f_2 dy + \int f_1 dx + \int f_3 dz,$$

---

<sup>2</sup>En la práctica solo se hace de una forma, la idea de hacer las tres es con el fin de mostrar al lector que cualquiera que se seleccione se llega al mismo resultado.

donde para  $f_1$  se desaparecen los términos con la variable  $y$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con la variables  $y$  y  $x$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int (xz - e^x \operatorname{sen} y) dy + \int 0 dx + \int z dz \\ &= xyz + e^x \cos y + \frac{z^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Considere la variable  $z$ , entonces la función potencial es

$$f(x, y, z) = \int f_3 dz + \int f_1 dx + \int f_2 dy,$$

donde para  $f_1$  se desaparecen los términos con la variable  $z$  y para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variables  $z$  y  $x$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int (xy + z) dz + \int e^x \cos y dx + \int 0 dy \\ &= xyz + \frac{z^2}{2} + e^x \cos y + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.18** Verifique que  $F(x, y, z) = (4xyz^2, 2x^2z^2, 4x^2yz + 1)$  es conservativo.

**Solución:** Observe que  $F$  posee todas sus derivadas parciales de primer orden. Luego, por el tercer punto de la observación 6.7, se va probar que  $F$  es un campo vectorial irrotacional. Para ello defina  $f_1(x, y, z) = 4xyz^2$ ,  $f_2(x, y, z) = 2x^2z^2$  y  $f_3(x, y, z) = 4x^2yz + 1$ , así:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (4x^2z - 4x^2z, 8xyz - 8xyz, 4xz^2 - 4xz^2) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que  $F$  es irrotacional y por tanto cumple la condición necesaria para ser conservativo. Luego, la función potencial viene dada por

$$f(x, y, z) = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz,$$

### 6.3. Campo vectorial conservativo

donde para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variable  $x$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con las variables  $x$  y  $y$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int (4xyz^2) dx + \int 0 dy + \int 1 dz \\ &= 2x^2yz^2 + z + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba que  $F = \nabla f$  y así efectivamente  $F$  es conservativo.

**Observación 6.9** Los demás ejemplos estudiados hasta ahora donde  $F$  es un campo conservativo, para determinar la función potencial  $f$  de  $F$  tal que  $F = \nabla f$ , se pueden realizar mediante el método anterior. Se invita al lector a realizarlo como ejercicio.

## Ejercicios

**Ejercicio 248** Determine la divergencia de los siguientes campos vectoriales.

1.  $F(x, y, z) = (x + \cos y, y + \sin z, z + e^x)$ .
2.  $F(x, y, z) = (0, 0, z - 1)$ .
3.  $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ .
4.  $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ .
5.  $F(x, y, z) = (x^3 + \sin z, x^2y + \cos z, e^{x^2+y^2})$ .
6.  $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ .
7.  $F(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ .
8.  $F(x, y, z) = (2x^2, -3y, z^2)$ .

**Ejercicio 249** Considere el campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

definido en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ . Calcule  $\operatorname{div} F$ .

**Ejercicio 250** Considere el campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z)$ . Determine  $\operatorname{div} F$ .

**Ejercicio 251** Demuestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$F(x, y, z) = (f_1(y, z), f_2(x, z), f_3(x, y))$$

tiene divergencia nula, es decir,  $\operatorname{div} F = 0$ .

**Ejercicio 252** Dado el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , donde  $f_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , admite segundas derivadas parciales continuas. Muestre que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

**Ejercicio 253** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar con derivadas parciales continuas. Verifique que

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Se acostumbra a denotar  $\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$ .

**Ejercicio 254** Determine el rotacional de los siguientes campos vectoriales.

1.  $F(x, y, z) = (xe^x y, e^{-y}, z^3)$ .
2.  $F(x, y, z) = (axy, bx, 0)$ , con  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$ .
3.  $F(x, y, z) = (3x^2 + 4y, 2x^2 y + 5z, 3x + 4y + 5z^3)$ .
4.  $F(x, y, z) = (x^2, x + y, 2xz^2)$ .
5.  $F(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2 z - 4xy, x^2 y + 2xz - 2)$ .
6.  $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ .
7.  $F(x, y, z) = (4z, 4x, 2y)$ .
8.  $F(x, y, z) = (x + y, 2x - z, y + z)$ .
9.  $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ .
10.  $F(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ .
11.  $F(x, y, z) = (4xyz^2, 2x^2 z^2, 4x^2 yz + 1)$ .

**Ejercicio 255** Compruebe que los siguientes campos son irrotacionales.

1.  $F(x, y, z) = (2xy^3 z, 3x^2 y^2 z, x^2 y^3)$ .

### 6.3. Campo vectorial conservativo

2.  $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$ .

**Ejercicio 256** Muestre que un campo constante  $F(x, y, z) = (a, b, c)$ , con  $a, b$  y  $c$  constantes reales, es irrotacional.

**Ejercicio 257** Muestre que el campo vectorial identidad  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  es irrotacional.

**Ejercicio 258** Dados los siguientes campos vectoriales, determine cuál es conservativo y halle su función potencial.

1.  $F(x, y) = (x, y)$ .

2.  $F(x, y) = (3x^2y, x^3)$ .

3.  $F(x, y, z) = (10xz^3 + 1, -6y^2, 15x^2z^2)$ .

4.  $F(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ .

5.  $F(x, y, z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z, x^2y^3)$ .

6.  $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$ .

7.  $F(x, y, z) = (z^2 + 1, 2z, 2xz + 2y)$ .

8.  $F(x, y, z) = (xy^2z^3, 2x^2y, 3x^2y^2z^2)$ .

9.  $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$ .

**Ejercicio 259** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$ .

1. Muestre que es irrotacional.

2. Halle la función potencial de  $F$

**Ejercicio 260** Considere el campo vectorial dado por  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ .

1. Compruebe que  $F$  cumple con la condición necesaria para ser conservativo. .

2. Halle la función potencial de  $F$ .

**Ejercicio 261** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (-\sin x \sin y, \cos x \cos y - 2z, e^z - 2y)$ .

1. Muestre que  $F$  es irrotacional.

2. Verifique que  $F$  es conservativo hallando su función potencial.

**Ejercicio 262** Considere el campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (axy - z^3, (a - 2)x^2, (1 - a)xz^2)$ , con  $a$  una constante.

1. Determine el valor de  $a$  para que  $F$  sea irrotacional.

2. Determine la función potencial  $f$  del campo anterior con el valor de  $a$  hallado.

**Ejercicio 263** Considere el campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (z, az^2 + 1, x + 10yz)$ , linebreak con  $a$  una constante.

1. Determine el valor de  $a$  para que  $F$  sea irrotacional.
2. Determine la función potencial  $f$  del campo anterior con el valor de  $a$  hallado.

## 6.4. Integral de línea

**Definición 6.6 (Caminos en  $\mathbb{R}^n$ )** Sea  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la parametrización de una curva  $\mathcal{C}$  continua en  $[a, b]$ , entonces:

1.  $\mathcal{C}$  se suele llamar **camino continuo** en el  $n$ -espacio (en el caso de  $n = 2$  se llama camino continuo en el plano y en el caso de  $n = 3$  se llama camino continuo en el espacio).
2.  $\mathcal{C}$  se dice **camino regular** si  $r'$  existe y es continua en  $]a, b[$ .
3.  $\mathcal{C}$  se dice **camino regular a trozos** si en el intervalo  $[a, b]$  puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales el camino es regular. En este caso,  $\mathcal{C}$  es la unión finita de caminos, cada uno de los cuales es regular. Un ejemplo se muestra en la figura 6.4.

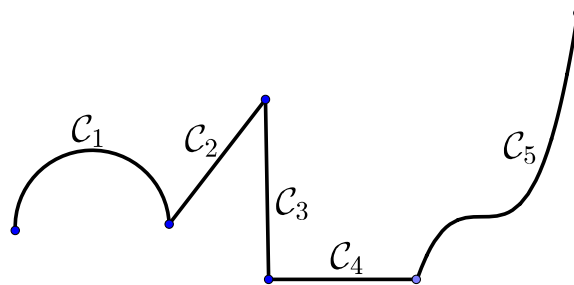


Figura 6.4: Curva regular a trozos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$

4.  $\mathcal{C}$  se dice un **camino cerrado** si  $r(a) = r(b)$ .
5.  $\mathcal{C}$  se dice un **camino cerrado simple** si  $\mathcal{C}$  es cerrado y no se corta a sí misma, es decir,  $r(t_1) \neq r(t_2)$  para cada  $t_1, t_2 \in ]a, b]$ , esto a su vez implica que la aplicación  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva en  $]a, b]$ .



6.  $\mathcal{C}$  se dice un **camino cerrado simple regular a trozos** si  $\mathcal{C}$  es cerrada, no se corta a sí misma en  $]a, b]$  y es la unión finita de caminos regulares. Además, si el camino  $\mathcal{C}$  es cerrado simple regular a trozos se supondrá que dicho camino es recorrida en el sentido contrario de las agujas del reloj, en cuyo caso se dice que la dirección es positiva. Un ejemplo se muestra en la figura 6.5.

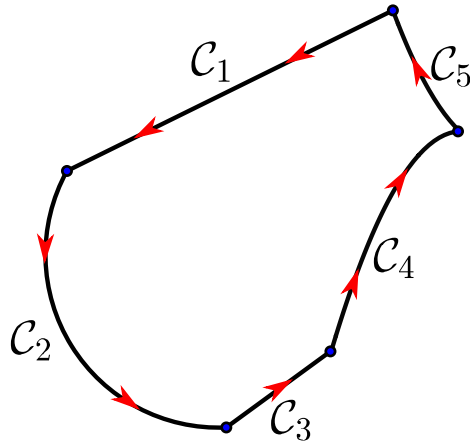


Figura 6.5: Curva cerrada simple regular a trozos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$ , recorrida en sentido positivo

### 6.4.1. Integral de línea sobre un campo escalar

**Definición 6.7** (Integral de línea sobre un campo escalar) Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y sea  $\mathcal{C}$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio, con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces se define la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  como

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt.$$

Además, se define la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  con respecto a la variable  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  como

$$\int_{\mathcal{C}} f \, dx_i = \int_a^b f(r(t)) x'_i(t) dt.$$

**Observación 6.10** En la definición anterior, cuando el camino  $\mathcal{C}$  es cerrado simple regular a trozos en el  $n$ -espacio, suponiendo que la dirección es positiva, la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  se denota como

$$\oint_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt.$$

**Ejemplo 6.19** Sea  $\mathcal{C}$  el segmento de recta  $x = y$  con  $x \in [1, 2]$ . Determine el valor de la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2x - y} ds.$$

**Solución:** Sea  $f(x, y) = \frac{1}{2x - y}$ . Luego, si se parametriza el camino  $\mathcal{C}$  se tiene que  $r(t) = (t, t)$  donde  $t \in [1, 2]$ , además  $r'(t) = (1, 1)$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_1^2 f(r(t)) \|r'(t)\| dt \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2t - t} \|(1, 1)\| dt \\ &= \sqrt{2} \int_1^2 \frac{1}{t} dt \\ &= \sqrt{2} \ln t \Big|_{t=1}^{t=2} \\ &= \sqrt{2} \ln 2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.20** Calcule  $\int_{\mathcal{C}} xy^2 ds$  donde la curva  $\mathcal{C}$  está parametrizada por  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

**Solución:** Observe que  $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} xy^2 ds &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \|(-\sin t, \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.21** Considere el campo escalar  $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ . Calcule la integral de línea  $\int_{\mathcal{C}} f ds$ , donde  $\mathcal{C}$  es la curva descrita por el segmento que va desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$  y el segmento que va desde  $(1, 1, 1)$  hasta  $(1, 1, 0)$ .

**Solución:** Un dibujo para la curva  $\mathcal{C}$  descrita en el ejemplo es la mostrada en la figura 6.6.

Note que dicha curva es regular a trozos (es la unión de dos rectas). Con ello se tendría que

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_{\mathcal{C}_1} f \, ds + \int_{\mathcal{C}_2} f \, ds.$$

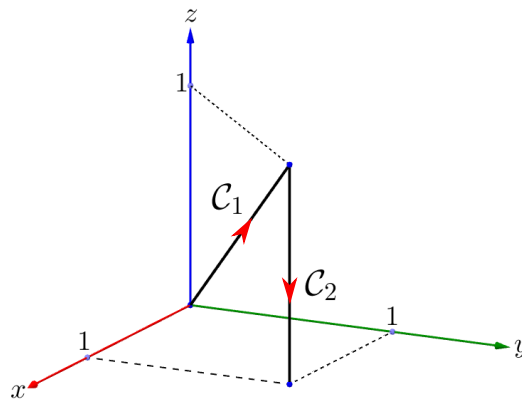


Figura 6.6: Curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

Se va calcular primero  $\int_{\mathcal{C}_1} f \, ds$ . Para ello note que  $\mathcal{C}_1$  es la recta que va desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ , y según la observación 2.3 se puede parametrizar como  $r_1(t) = (1-t)(0, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ , es decir,  $r_1(t) = (t, t, t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} f \, ds &= \int_0^1 f(r_1(t)) \|r_1'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t) \|(1, 1, 1)\| \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) \, dt \\ &= \sqrt{3} (t^2 - t^3) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga se calcula  $\int_{\mathcal{C}_2} f ds$ . La parametrización de  $\mathcal{C}_2$  viene dada por  $r_2(t) = (1-t)(1, 1, 1) + t(1, 1, 0)$ , es decir,  $r_2(t) = (1, 1, 1-t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} f ds &= \int_0^1 f(r_2(t)) \|r_2'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 (1 - 3 \cdot 1 + 1 - t) \|(0, 0, -1)\| dt \\ &= \int_0^1 (-1 - t) dt \\ &= \left( -t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente se tendría que

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \int_{\mathcal{C}_2} f ds = 0 + -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

**Ejemplo 6.22** Calcule  $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$  donde  $\mathcal{C}$  es la espiral (una vuelta) de la curva hélice  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con  $a, b$  constantes positivas.

**Solución:** Dado que la curva hélice da sólo una vuelta se deduce que  $t \in [0, 2\pi]$ . Ahora, sea

$f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f ds &= \int_0^{2\pi} f(r(t)) \|r'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{b^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \|(-a \sin t, a \cos t, b)\| dt \\ &= \frac{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} t^2 dt \\ &= \frac{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \left( \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{8\pi^3 b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3a^2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.23** Calcule  $\int_{\mathcal{C}} xy^2 dx$  y  $\int_{\mathcal{C}} xy^2 dy$  donde  $\mathcal{C}$  es la parte de la parábola  $y = x^2$  entre  $(0, 0)$  y  $(2, 4)$ .

**Solución:** Un dibujo del camino  $\mathcal{C}$  está en la figura 6.7 siguiente:

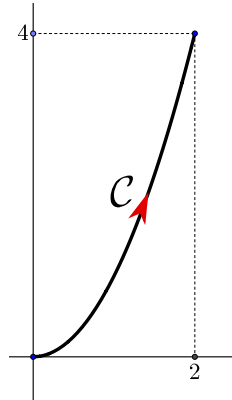


Figura 6.7: Camino  $y = x^2$  desde  $(0,0)$  hasta  $(2,4)$

Las ecuaciones paramétricas del camino  $\mathcal{C}$  son  $r(t) = (t, t^2)$  tal que  $t \in [0, 2]$ . Sea  $f(x, y) = xy^2$ , con ello se tiene que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \int_{\mathcal{C}} f \, dx &= \int_0^2 f(r(t))x'(t)dt = \int_0^2 t(t^2)^2 dt = \int_0^2 t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 \Big|_{t=0}^{t=2} = \frac{32}{3}. \\ \blacksquare \int_{\mathcal{C}} f \, dy &= \int_0^2 f(r(t))y'(t)dt = \int_0^2 t(t^2)^2 2t dt = \int_0^2 2t^6 dt = \frac{2}{7}t^7 \Big|_{t=0}^{t=2} = \frac{256}{7}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.24** Sea  $a > 0$ , plantee  $\int_{\mathcal{C}} y^2 \, dx$  y  $\int_{\mathcal{C}} x^2 \, dy$  donde la curva  $\mathcal{C}$  está parametrizada por  $r(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Solución:** Defina  $f(x, y) = y^2$  para la primera integral y  $f(x, y) = x^2$  para la segunda integral.

Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned} \blacksquare \int_{\mathcal{C}} f \, dx &= \int_0^{2\pi} f(r(t))x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt. \\ \blacksquare \int_{\mathcal{C}} f \, dy &= \int_0^{2\pi} f(r(t))y'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt = a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt. \end{aligned}$$

**Observación 6.11** Sean  $f_1, \dots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares y sea  $\mathcal{C}$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio, con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es frecuente que

las integrales de línea de estos campos escalares a lo largo de  $\mathcal{C}$  con respecto a las variables  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , aparezcan juntas, es decir,

$$\int_{\mathcal{C}} f_1 dx_1 + \dots + \int_{\mathcal{C}} f_n dx_n.$$

Por comodidad de notación se escribe  $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  en vez de escribir la expresión  $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx_1 + \dots + \int_{\mathcal{C}} f_n dx_n$ . Algunos casos particulares son:

1. Si  $f_1, f_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son campos escalares de dos variables, entonces una integral de línea puede aparecer de la forma

$$\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy.$$

2. Si  $f_1, f_2, f_3 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  son campos escalares de tres variables, entonces una integral de línea puede aparecer de la forma

$$\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

**Ejemplo 6.25** Calcule  $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy$  donde  $\mathcal{C}$  es la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  recorrida en sentido positivo.

**Solución:** La parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  es  $r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

Así se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^{2\pi} ((3 \sin t)^2(-2 \sin t) + (2 \cos t)^2(3 \cos t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-18 \sin^3 t + 12 \cos^3 t) dt \\ &= -18 \int_0^{2\pi} (\sin t(1 - \cos^2 t)) dt + 12 \int_0^{2\pi} (\cos t(1 - \sin^2 t)) dt \\ &= 18 \left( \cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} + 12 \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.26** Calcule  $I = \int_{\mathcal{C}} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  está descrita por  $y = 1 - |1 - x|$  desde  $x = -1$  hasta  $x = 3$ .

**Solución:** La gráfica de la curva  $\mathcal{C}$  corresponde a la figura 6.8.

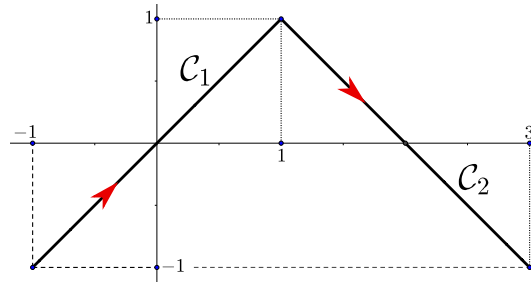


Figura 6.8: Camino  $y = 1 - |1 - x|$  desde  $x = -1$  hasta  $x = 3$

Observe que el camino  $\mathcal{C}$  realmente es la unión de dos caminos rectilíneos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . De esta forma se tiene que

$$I = \int_{\mathcal{C}_1} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy + \int_{\mathcal{C}_2} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy.$$

- Para  $\int_{\mathcal{C}_1} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$ , observe que  $\mathcal{C}_1$  es la recta que va desde el punto  $(-1, -1)$  hasta el punto  $(1, 1)$ , que se parametriza como  $r_1(t) = (1 - t)(-1, -1) + t(1, 1) = (2t - 1, 2t - 1)$  con  $t \in [0, 1]$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy &= \int_0^1 [((2t - 1)^2 - (2t - 1)^2) \cdot 2 + ((2t - 1)^2 \\ &\quad + (2t - 1)^2) \cdot 2] dt \\ &= 4 \int_0^1 (2t - 1)^2 dt \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

- Para  $\int_{\mathcal{C}_2} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$ , observe que  $\mathcal{C}_2$  es la recta que va desde el punto  $(1, 1)$  hasta el punto  $(3, -1)$ , que se parametriza como  $r_2(t) = (1 - t)(1, 1) + t(3, -1) = (2t + 1, 1 - 2t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy &= \int_0^1 [((2t + 1)^2 - (1 - 2t)^2) \cdot 2 + ((2t + 1)^2 \\ &\quad + (1 - 2t)^2) \cdot -2] dt \\ &= -4 \int_0^1 (1 - 2t)^2 dt \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Por último es claro que  $I = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$ .

**Ejemplo 6.27** Calcule  $\int_C 2xy \, dx + (x^2 + z) \, dy + (x + y + z) \, dz$  donde  $C$  es el segmento que va desde el punto  $(1, 0, 2)$  hasta el punto  $(3, 4, 1)$ .

**Solución:** Observe que en este caso se tiene que  $f_1(x, y, z) = 2yx$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2 + z$  y  $f_3(x, y, z) = x + y + z$ . Luego, para parametrizar la curva  $C$  se usa la observación 2.3, así  $r(t) = (1 - t)(1, 0, 2) + t(3, 4, 1)$  con  $t \in [0, 1]$ , es decir:

$$r(t) = (1 + 2t, 4t, 2 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx + (x^2 + z) \, dy + (x + y + z) \, dz &= \int_0^1 [2 \cdot (1 + 2t) \cdot 4t \cdot 2] + [(1 + 2t)^2 + (2 - t)] \cdot 4 \\ &\quad + [(1 + 2t) + (4t) + (2 - t)] \cdot -1 \, dt \\ &= \int_0^1 (48t^2 + 23t + 9) \, dt \\ &= \left( \frac{48}{3}t^3 + \frac{23}{2}t^2 + 9t \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{73}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.28** Calcule  $\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$  donde la curva  $C$  es la intersección de las superficies  $x + y = 2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  recorrida en el sentido de las agujas del reloj visto desde el origen, como lo muestra la figura 6.9.

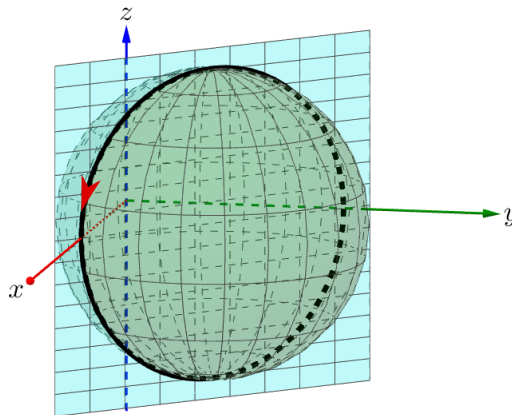


Figura 6.9: Curva de intersección entre las superficies  $x + y = 2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y$



**Solución:** La curva está dada por la intersección entre un plano y una esfera, esto es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 - y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y \end{cases} .$$

Así, cambiando el plano  $x = 2 - y$  en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  se produce la elipse  $(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ , siendo esta la curva  $\mathcal{C}$  recorrida en el sentido de las agujas del reloj visto desde el origen, la cual se parametriza como

$$r(t) = (1 - \cos t, 1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t),$$

donde  $t \in [0, 2\pi]$ . Con estos datos, la integral de línea solicitada viene dada por:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t) \sin t - \sqrt{2} \sin t \sin t + (1 - \cos t) \sqrt{2} \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t + \sin t \cos t + \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2}] dt \\ &= \left( -\cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} t \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

**Observación 6.12** Sea  $\mathcal{C}$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio parametrizada por  $r(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $t \in [a, b]$ . Suponga que dicha curva está recorrida desde un punto inicial  $A$  (corresponde al valor de  $r(a)$ ) hasta un punto final  $B$  (corresponde al valor de  $r(b)$ ). Si  $-\mathcal{C}$  denota la misma curva  $\mathcal{C}$  pero con orientación opuesta, es decir, el punto inicial pasa a ser  $B$  y el punto final pasa a ser  $A$ , entonces se cumple que

$$\int_{-\mathcal{C}} f \, ds = - \int_{\mathcal{C}} f \, ds.$$

En tal caso, también se cumple que

$$\int_{-\mathcal{C}} f \, dx_i = - \int_{\mathcal{C}} f \, dx_i.$$

**Ejemplo 6.29** Considere el ejemplo 6.27, determine la misma integral pero esta vez la curva  $\mathcal{C}$  es el segmento que va desde el punto  $(3, 4, 1)$  hasta el punto  $(1, 0, 2)$ .

**Solución:** Una opción es parametrizar  $\mathcal{C}$  como  $r(t) = (3 - 2t, 4 - 4t, 1 + t)$  con  $t \in [0, 1]$  y

proceder a calcular la respectiva integral de línea. Sin embargo, usando la observación 6.12 se deduce que

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy \, dx + (x^2 + z) \, dy + (x + y + z) \, dz = -\frac{73}{2},$$

ya que es la misma integral pero en dirección opuesta. Se invita al lector verificar la veracidad de este resultado calculando la integral de línea mediante la parametrización sugerida al inicio de esta solución.

### 6.4.2. Integral de línea sobre un campo vectorial

**Definición 6.8 (Integral de línea sobre un campo vectorial)** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial y sea  $\mathcal{C}$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio, con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces se define la integral de línea de  $F$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  como

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt.$$

**Observación 6.13** En la definición anterior, cuando el camino  $\mathcal{C}$  es cerrado simple regular a trozos en el  $n$ -espacio, suponiendo que la dirección es positiva, la integral de línea de  $F$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  se denota como

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt.$$

**Ejemplo 6.30** Calcule  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  donde  $F(x, y, z) = (2xy, 2y, z^2)$  y  $\mathcal{C}$  es el camino  $r : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = (2t, t - 1, t^2)$ .

**Solución:** Observe que para la curva parametrizada se tiene que  $t \in [-1, 2]$  y que además

## 6.4. Integral de línea

$r'(t) = (2, 1, 2t)$ . Con esta información la integral de línea solicitada es

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_{-1}^2 F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\
 &= \int_{-1}^2 F(2t, t-1, t^2) \cdot (2, 1, 2t) dt \\
 &= \int_{-1}^2 (4t^2 - 4t, 2t - 2, t^4) \cdot (2, 1, 2t) dt \\
 &= \int_{-1}^2 (2(4t^2 - 4t) + 2t - 2 + 2t^5) dt \\
 &= \int_{-1}^2 (2t^5 + 8t^2 - 6t - 2) dt \\
 &= \left( \frac{2}{6}t^6 + \frac{8}{3}t^3 - \frac{6}{2}t^2 - 2t \right) \Big|_{t=-1}^{t=2} \\
 &= 30.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.31** Calcule  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  donde  $F(x, y, z) = (x^2, y, xz)$  y  $\mathcal{C}$  es el camino que va desde  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ , de  $(1, 0, 0)$  a  $(1, 1, 0)$  y de  $(1, 1, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ . Realice un dibujo del camino  $\mathcal{C}$ .

**Solución:** Un dibujo del camino  $\mathcal{C}$  está dado en la figura 6.10. Para proceder a darle solución a la integral de línea, observe que el camino  $\mathcal{C}$  es la unión de tres rectas: una primera, denotada por  $\mathcal{C}_1$ , que va desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 0, 0)$ , la segunda recta, denotada por  $\mathcal{C}_2$ , que va desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 0)$ , y una tercer recta, denotada por  $\mathcal{C}_3$ , la cual va desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ . Así se tiene que:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr.$$

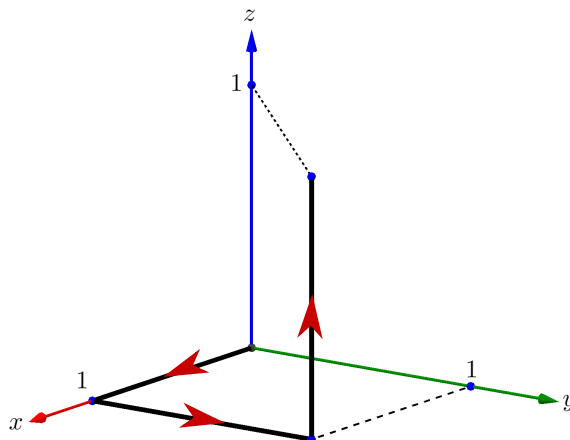


Figura 6.10: Camino  $\mathcal{C}$

- Para  $\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr$ , note que la recta  $\mathcal{C}_1$  se parametriza como  $r_1(t) = (1-t)(0,0,0) + t(1,0,0) = (t,0,0)$ , donde  $t \in [0,1]$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \int_0^1 F(t,0,0) \cdot (1,0,0) dt \\ &= \int_0^1 (t^2,0,0) \cdot (1,0,0) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- Para  $\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr$ , observe que la recta  $\mathcal{C}_2$  se parametriza como  $r_2(t) = (1-t)(1,0,0) + t(1,1,0) = (1,t,0)$ , donde  $t \in [0,1]$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_0^1 F(1,t,0) \cdot (0,1,0) dt \\ &= \int_0^1 (1,t,0) \cdot (0,1,0) dt \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Para  $\int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr$ , la recta  $\mathcal{C}_3$  se parametriza como  $r_3(t) = (1-t)(1,1,0) + t(1,1,1) = (1,1,t)$ , donde  $t \in [0,1]$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr &= \int_0^1 F(1,1,t) \cdot (0,0,1) dt \\ &= \int_0^1 (1,1,t) \cdot (0,0,1) dt \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

**Observación 6.14** Existe una relación entre las integrales de línea sobre campos escalares y una integral de línea sobre campos vectoriales. Por ejemplo, sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial dado por  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , donde  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  son campos escalares. Se va usar la definición 6.8 para determinar la integral de línea de  $F$  a lo largo de una curva regular a trozos  $\mathcal{C}$  en el espacio, parametrizada por  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  con  $t \in [a, b]$ , esto es:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\
 &= \int_a^b [(f_1(r(t)), f_2(r(t)), f_3(r(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))] dt \\
 &= \int_a^b [f_1(r(t))x'(t) + f_2(r(t))y'(t) + f_3(r(t))z'(t)] dt \\
 &= \int_a^b f_1(r(t))x'(t) dt + \int_a^b f_2(r(t))y'(t) dt + \int_a^b f_3(r(t))z'(t) dt \\
 &= \int_{\mathcal{C}} f_1 dx + \int_{\mathcal{C}} f_2 dy + \int_{\mathcal{C}} f_3 dz \\
 &= \int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.
 \end{aligned}$$

En resumen, se obtiene la fórmula

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Esto quiere decir que una integral de línea sobre un campo vectorial a lo largo de una curva regular a trozos  $\mathcal{C}$  en el espacio se puede escribir como una integral de línea sobre los campos escalares que componen al campo vectorial. De hecho, este resultado se puede generalizar para campos vectoriales  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $F = (f_1, \dots, f_n)$ , con  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares para cada  $i = 1, \dots, n$ . La fórmula obtenida es:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \\
 &= \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n f_i dx_i.
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{C}$  un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio.

**Ejemplo 6.32** Sea  $a > 0$  y sea  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  un campo vectorial. Sea  $\mathcal{C}$  la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ax$  con  $z \geq 0$ . Si la curva está en sentido de las agujas del reloj vista desde el origen, plantee  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ .

**Solución:** Según la observación 6.14 se debe plantear la integral  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$ .

Para ello, se necesita primero parametrizar el camino  $\mathcal{C}$ , que está dado por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} .$$

Del cilindro, al completar cuadrados se obtiene  $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . De aquí se infiere que  $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t$  y  $y = \frac{a}{2} \sin t$ . Posteriormente, de la esfera se deduce que

$$\begin{aligned} z^2 &= a^2 - (x^2 + y^2) \\ &= a^2 - ax \\ &= a^2 - a \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \right) \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos t \\ &= a^2 \left( \frac{1 - \cos(2 \cdot \frac{t}{2})}{2} \right) \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Puesto que  $z \geq 0$ , se tiene que  $z = a \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ . Por tanto, el camino  $\mathcal{C}$  se parametriza como

$$r(t) = \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2} \sin t, a \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Con la información anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \right)^2 \left( -\frac{a}{2} \sin t \right) + \left( \frac{a}{2} \sin t \right)^2 \left( \frac{a}{2} \cos t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( a \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right)^2 \left( \frac{a}{2} \cos \frac{t}{2} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

que corresponde a la integral solicitada. En este caso el integrando no se simplificó.

**Observación 6.15** De forma similar a la observación 6.12, si  $\mathcal{C}$  es un camino regular a trozos en el  $n$ -espacio y si  $-\mathcal{C}$  denota la misma curva  $\mathcal{C}$ , pero con orientación opuesta, entonces

$$\int_{-\mathcal{C}} F \cdot dr = - \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr.$$

**Ejemplo 6.33** Sea  $F(x, y, z) = (x + y, y - z, x + z)$  y sea  $\mathcal{C}$  la curva dada por

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{C}_1 : r_1(t) = (1 - t, 2 + 2t, 2t) & \text{con } t \in [0, 1], \\ \mathcal{C}_2 : r_2(t) = (0, t^2, t) & \text{con } t \in [0, 2]. \end{cases}$$

Determine la integral de línea de  $F$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  suponiendo que la dirección es en sentido contrario de las agujas del reloj, visto desde el eje  $x$ .

**Solución:** Un dibujo del camino  $\mathcal{C}$  es el mostrado en la figura 6.11.

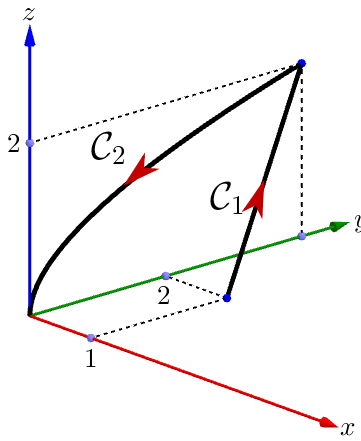


Figura 6.11: Camino  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

Note que  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr - \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr$ , donde el negativo de la segunda integral de línea se debe a que, según la parametrización dada del camino  $\mathcal{C}_2$ , esta se mueve en dirección contraria a la descrita en la figura 6.11. A partir de ello se tiene que:

- Para la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} (x + y) dx + (y - z) dy + (x + z) dz \\ &= \int_0^1 [-(1 - t + 2 + 2t) + (2 + 2t - 2t)2 + (1 - t + 2t)2] dt \\ &= \int_0^1 (t + 3) dt \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

- Para la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} (x + y) dx + (y - z) dy + (x + z) dz \\ &= \int_0^2 [0 + (t^2 - t)2t + t] dt \\ &= \int_0^2 (2t^3 - 2t^2 + t) dt \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Por último, se tendría que  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{7}{2} - \frac{14}{3} = -\frac{7}{6}$ .

**Ejemplo 6.34** Calcule el valor de  $\oint_{\mathcal{C}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ , donde  $\mathcal{C}$  corresponde a la frontera de la superficie definida por  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ ,  $x = 1$  y  $x = -1$ , la cual está orientada positivamente vista desde el eje  $z$  negativo.

**Solución:** La curva  $\mathcal{C}$  es regular a trozos, es decir, es la unión de las curvas  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  y  $\mathcal{C}_4$ , como lo muestra la figura 6.12. Así, tomando  $F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$  se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr.$$

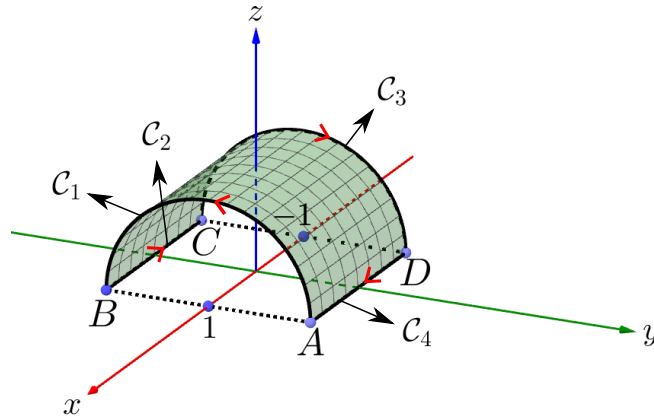


Figura 6.12: Camino  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$

Note que los puntos mostrados en la figura son  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, -1, 0)$ ,  $C(-1, -1, 0)$  y  $D(-1, 1, 0)$ . Con lo anterior, se tiene lo siguiente:



## 6.4. Integral de línea

- La curva  $\mathcal{C}_1$ , que va desde el punto  $A(1, 1, 0)$  hasta el punto  $B(1, -1, 0)$ , se puede parametrizar como

$$r_1(t) = (1, \cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, \pi].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ &= \int_0^\pi (-1 + \sin t + \cos t) dt = 2 - \pi. \end{aligned}$$

- El segmento  $\mathcal{C}_2$  que va desde el punto  $B(1, -1, 0)$  hasta el punto  $C(-1, -1, 0)$  se parametriza como

$$r_2(t) = (1 - t)B + tC = (1 - 2t, -1, 0) \text{ con } t \in [0, 1].$$

Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ &= 2 \int_0^1 dt = 2. \end{aligned}$$

- La curva  $\mathcal{C}_3$ , que va desde el punto  $C(-1, -1, 0)$  hasta el punto  $D(-1, 1, 0)$  se puede parametrizar como

$$r_3(t) = (-1, \cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, \pi].$$

Sin embargo, según la figura 6.12, note que esta parametrización tiene orientación contraria a  $\mathcal{C}_3$ , y por la observación 6.15, se debe agregar un negativo a la integral de línea, esto es:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_3} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ &= - \int_0^\pi (-1 - \sin t - \cos t) dt = 2 + \pi. \end{aligned}$$

- El segmento  $\mathcal{C}_4$  que va desde el punto  $D(-1, 1, 0)$  hasta el punto  $A(1, 1, 0)$  se parametriza como

$$r_1(t) = (1 - t)D + tA = (2t - 1, 1, 0) \text{ con } t \in [0, 1].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_4} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ &= 2 \int_0^1 dt = 2. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = 2 - \pi + 2 + 2 + \pi + 2 = 8.$$

### 6.4.3. Aplicación de las integrales de línea

Suponga que la fuerza que actúa sobre el punto  $(x, y, z)$  está representado por  $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ , donde  $f_1, f_2$  y  $f_3$  son campos escalares continuos, en este caso el campo vectorial  $F$  también se le llama un campo vectorial de fuerzas o simplemente un campo de fuerza.

**Definición 6.9 (Trabajo)** El trabajo realizado por un campo de fuerzas<sup>3</sup>  $F = (f_1, f_2, f_3)$  a lo largo de una curva  $C$  con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  está dado por

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Análogamente, si  $F = (f_1, f_2)$  y  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C f_1 dx + f_2 dy.$$

**Ejemplo 6.35** Calcule el trabajo efectuado por el campo de fuerzas  $F(x, y) = (xy, y)$  a lo largo del camino  $C$  formado por parte de la parábola  $y = x^2$  que va desde  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  y el segmento de recta que va desde  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ , en sentido antihorario (se refiere a que la dirección es positiva).

**Solución:** El dibujo de la curva  $C$  se muestra en la figura 6.13.

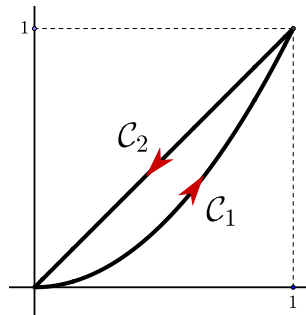


Figura 6.13: Camino  $C = C_1 \cup C_2$

<sup>3</sup>En mecánica clásica, una fuerza realiza un trabajo cuando hay un desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de dicha fuerza. Se representa con la letra  $W$  y se expresa en unidades de energía, esto es en julios.

Con ello, observe que

$$W = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr.$$

- Note  $\mathcal{C}_1$  se parametriza como  $r_1(t) = (t, t^2)$  donde  $t \in [0, 1]$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} xy \, dx + y \, dy = \int_0^1 (t^3 + 2t^3) dt = \frac{3}{4}.$$

- De forma similar, observe que  $\mathcal{C}_2$  se parametriza como  $r_2(t) = (1-t, 1-t)$  donde  $t \in [0, 1]$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} xy \, dx + y \, dy = \int_0^1 (-(1-t)(1-t) - (1-t)) dt = -\frac{5}{6}.$$

Finalmente se tiene que  $W = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12}$ .

### 6.4.4. Independencia de la trayectoria.

**Definición 6.10 (Conjunto conexo abierto)** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, el conjunto  $U$  se llama conexo si todo par de puntos de  $U$  puede unirse mediante un camino regular a trozos cuya gráfica está situada en  $U$ , es decir, para cada  $A, B \in U$  existe un camino regular a trozos  $\mathcal{C}$  parametrizado por  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $r(t) \in U$  para todo  $t \in [a, b]$ , siendo  $r(a) = A$  y  $r(b) = B$ .

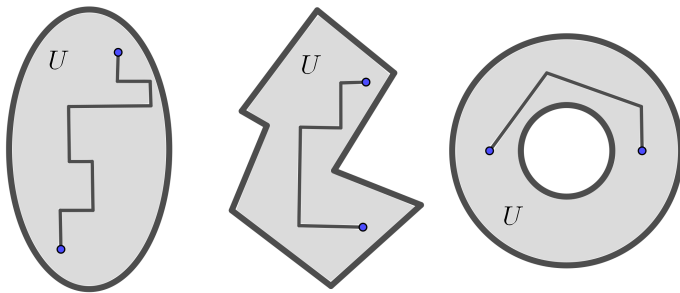


Figura 6.14: Conjuntos conexos

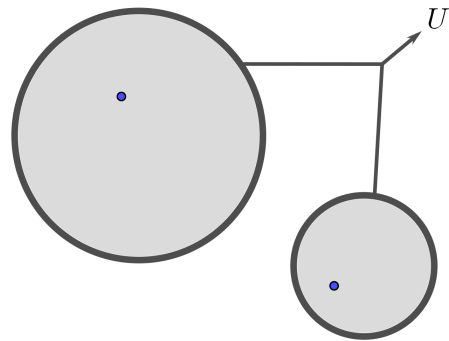


Figura 6.15: Conjunto no conexo

**Definición 6.11 (Independencia de la trayectoria para una integral de línea)** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial, con  $U$  un conjunto conexo abierto, sea  $\mathcal{C}$  una curva con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow U$  tal que  $r(a) = A$  y  $r(b) = B$ , se dice que la integral de

línea  $\int_C F \cdot dr$  es independiente de la trayectoria si para cualquier curva  $C'$  con parametrización  $\gamma : [c, d] \rightarrow U$  tal que  $\gamma(c) = A$  y  $\gamma(d) = B$  se tiene que

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C'} F \cdot dr.$$

**Observación 6.16** Según la definición 6.11 anterior, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. Básicamente una integral de línea es independiente de la trayectoria si dado un campo vectorial  $F$  definido en un conjunto conexo abierto de  $\mathbb{R}^n$ , un punto inicial  $A \in U$  y un punto final  $B \in U$ , entonces para cualquier curva  $C$  de  $A$  hasta  $B$  la integral de línea  $\int_C F \cdot dr$  siempre tiene el mismo resultado.
2. También se suele llamar una integral de línea independiente del camino.

**Teorema 6.3** Si  $F$  es un campo vectorial sobre una región conexa y abierta de  $\mathbb{R}^n$ , entonces la integral  $\int_C F \cdot dr$  es independiente de la trayectoria si y sólo si  $F$  es conservativo.

**Teorema 6.4 (Teorema fundamental para integrales de línea)** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial conservativo sobre  $U$  un conjunto conexo abierto, sea  $f$  la función potencial de  $F$ . Entonces para cualquier curva regular a trozos  $C$  en la región  $U$  parametrizada por  $r : [a, b] \rightarrow U$  tal que  $r(a) = A$  y  $r(b) = B$  se tiene que

$$\int_C F \cdot dr = f \Big|_A^B = f(B) - f(A).$$

**Corolario 6.1** Sea  $F$  un campo vectorial conservativo y sea  $C$  una curva cerrada simple regular a trozos, es decir, que su punto final e inicial es el mismo, entonces

$$\oint_C F \cdot dr = f \Big|_A^B = f(B) - f(A) = 0,$$

puesto que  $A$  es igual a  $B$ .

**Observación 6.17** En términos físicos, si una partícula da una vuelta completa sobre una curva cerrada simple que se halla en un campo de fuerza conservativo, entonces el trabajo realizado es cero.

**Observación 6.18** De acuerdo con los teoremas 6.3 y 6.4 y el corolario 6.1, se puede establecer la equivalencia de las siguientes tres proposiciones para un campo vectorial  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  sobre un conjunto conexo abierto  $U$ :

1.  $F$  es conservativo, es decir,  $F = \nabla f$ , donde  $f$  es la función potencial de  $F$ .
2.  $\int_C F \cdot dr$  es independiente del camino, en tal caso  $\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$ , donde  $A$  es el punto inicial y  $B$  el punto final de la curva  $C$ .
3.  $\oint_C F \cdot dr = 0$ , es decir, la integral de línea de  $F$  sobre todo camino cerrado regular a trozos contenido en  $U$  es nula.

En este sentido, si una de las tres proposiciones se cumple, las otras dos también. En cambio, si una no se cumple, tampoco se cumplen las otras dos. Además, en este punto, es importante retomar el teorema 6.2, pues permite establecer que si  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  posee sus derivadas parciales de primer orden, una condición necesaria para alguna de las tres proposiciones anteriores es<sup>4</sup>

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \text{para todo } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Cabe preguntarse por qué esta condición **es necesaria pero no suficiente**. Para responder a esta interrogante, considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.36** Sea el campo vectorial  $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , tal que  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ .

1. Muestre que  $F$  cumple con las condiciones del teorema 6.2, es decir, verifique que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ .
2. Verifique que  $F$  no es conservativo en  $U$ . Sugerencia: calcule la integral de línea de  $F$  sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y use la observación 6.18.

### Solución:

1. Defina  $f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  y  $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Así, observe que

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \\ \bullet \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Recuerde que en  $\mathbb{R}^2$  esto equivale comprobar que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$  y en  $\mathbb{R}^3$  equivale a verificar que  $F$  sea irrotacional.

Con ello, se tiene que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ .

2. Por la sugerencia dada, la curva  $\mathcal{C}$  descrita por  $x^2 + y^2 = 1$  se parametriza como  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot -\sin t + \cos t \cdot \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Entonces  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr \neq 0$ , y por tanto  $F$  no puede ser conservativo por el tercer punto de la observación 6.18. Esto demuestra por qué la condiciones del teorema 6.2 son necesarias pero no suficientes para que  $F$  sea conservativo.

Surge aquí otra interrogante sobre cuándo las condiciones del teorema 6.2 son **necesarias y suficientes** para que el campo vectorial sea conservativo. En este sentido se debe considerar la definición de un conjunto convexo abierto, mostrada a continuación.

**Definición 6.12 (Conjunto convexo abierto)** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, el conjunto  $U$  se llama **convexo** si todo par de puntos de  $U$  pueden unirse mediante un segmento completamente contenido en  $U$ , es decir, para cada  $A, B \in U$  el segmento  $r(t) = (1-t)A + tB$ ,  $t \in [0, 1]$ , siendo  $r(0) = A$  y  $r(1) = B$ , está contenido en su totalidad en  $U$ .

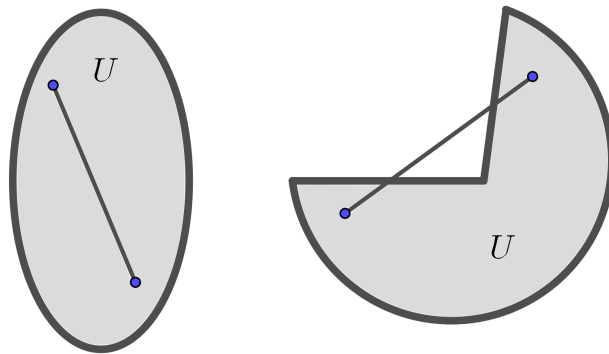


Figura 6.16: Conjunto convexo y conjunto no convexo respectivamente

- Ejemplo 6.37**
1. El conjunto  $\mathbb{R}^n$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , es un conjunto convexo abierto.
  2. El conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$  es un conjunto convexo abierto.

3. El conjunto  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  no es convexo. Para verificarlo, tome el segmento que inicia en el punto  $A$  y termina en el punto  $-A$ , cuya parametrización es

$$r(t) = (1 - t)A - tA = (1 - 2t)A \text{ con } t \in [0, 1].$$

Para  $t = \frac{1}{2}$  se tiene que  $r\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 0)$ , el cual no pertenece a  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Así dicho conjunto no es convexo. Sin embargo, note que sí es conexo.

4. El conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  no es un conjunto convexo abierto. Note que sí es conexo.

**Observación 6.19** De acuerdo con la definición 6.12, se tiene los siguientes puntos:

1. Todo conjunto convexo es también conexo, lo contrario no necesariamente es cierto.
2. Cuando  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  es un campo vectorial con todas sus derivadas parciales de primer orden sobre un conjunto convexo abierto  $U$ , entonces las condiciones del teorema 6.2 son necesarias y suficientes para que se cumplan alguna (y por tanto todas) las proposiciones de la observación 6.18.
3. En los ejemplos dados a continuación, los campos vectoriales dados están definidos sobre  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , ambos conjuntos convexos abiertos. En el caso en que estén definidos sobre conjuntos conexos abiertos y cumplan las condiciones del teorema 6.2, igual se intentará construir su función potencial.

**Ejemplo 6.38** Sea  $F(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$  un campo de fuerza, calcule el trabajo realizado por  $F$  a lo largo de una curva  $\mathcal{C}$  que va de  $(0, 1, \frac{1}{2})$  hasta  $(\frac{\pi}{2}, 3, 2)$ .

**Solución:** Como no existe una curva  $\mathcal{C}$  definida o dada, se intuye que el trabajo  $W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$

puede ser independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Para ello, **primero** se verifica que el campo vectorial  $F(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$  es conservativo, y como  $F$  posee todas sus derivadas parciales de primer orden continuas y está definido sobre  $\mathbb{R}^2$  (el cual es convexo), equivale a comprobar que  $F$  sea irrotacional. Tome  $f_1(x, y, z) = y^2 \cos x$ ,  $f_2(x, y, z) = 2y \sin x + e^{2z}$  y  $f_3(x, y, z) = 2ye^{2z}$ , con ello note que:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (2e^{2z} - 2e^{2z}, 0 - 0, 2y \cos x - 2y \cos x) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Con ello  $F$  es irrotacional y por consiguiente es conservativo, esto a su vez implica que  $W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Ahora, como **segundo** paso, debe existir la función potencial  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} F &= \nabla f \\ \Rightarrow (f_1, f_2, f_3) &= (f_x, f_y, f_z) \\ \Rightarrow (y^2 \cos x, 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}, 2ye^{2z}) &= (f_x, f_y, f_z), \end{aligned}$$

de donde se forma el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = y^2 \cos x & (1) \\ f_y(x, y, z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} & (2) \\ f_z(x, y, z) = 2ye^{2z} & (3) \end{cases}$$

Del sistema anterior seleccione cualquiera de las tres ecuaciones, en particular se escoge la ecuación (2) y se integra con respecto a la variable  $y$ , obteniendo

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + m(x, z) \quad (4),$$

donde  $m(x, z)$  es una constante con respecto a  $y$ . Ahora, derive (4) con respecto a  $x$ , para obtener

$$f_x(x, y, z) = y^2 \cos x + m_x(x, z),$$

la cual se iguala a la ecuación (1), esto es:

$$y^2 \cos x + m_x(x, z) = y^2 \cos x,$$

de donde se deduce que  $m_x(x, z) = 0$ . Integrando con respecto a  $x$  se tiene que

$$m(x, z) = K_1 + n(z)$$

siendo  $K_1 \in \mathbb{R}$  y  $n(z)$  una constante con respecto a la variable  $x$  y  $y$ . Este último resultado se sustituye en (4), como sigue:

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + K_1 + n(z). \quad (5)$$

De manera similar al proceso anterior, derive (5) con respecto a  $z$ , y se obtiene

$$f_z(x, y, z) = 2ye^{2z} + n_z(z),$$



## 6.4. Integral de línea

cuyo resultado se iguala a (3), esto es

$$2ye^{2z} + n_z(z) = 2ye^{2z},$$

entonces  $n_z(z) = 0$ . Luego, integrando esta última igualdad con respecto a  $z$  se obtiene que  $n(z) = K_2$ , donde  $K_2 \in \mathbb{R}$ . Así, se cambia esto último en (5), obteniendo la función potencial de  $F$  dada por<sup>5</sup>

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + K_1 + K_2 = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + K,$$

con  $K \in \mathbb{R}$ . No es difícil ver que efectivamente

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}, 2ye^{2z}) = F(x, y, z).$$

Así, el campo vectorial  $F$  realmente es conservativo. Como **tercer** paso, se procede a calcular el trabajo  $W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  mediante el teorema fundamental para integrales de línea, esto es:

$$W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f \Big|_{(0,1,\frac{1}{2})}^{(\frac{\pi}{2},3,2)} = f\left(\frac{\pi}{2}, 3, 2\right) - f\left(0, 1, \frac{1}{2}\right) = 9 + 3e^4 - e,$$

siendo este el resultado solicitado.

**Ejemplo 6.39** Muestre que la integral de línea  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  con  $F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Suponiendo que la curva  $\mathcal{C}$  tiene punto inicial  $A(0, 1)$  y punto final  $B(2, 3)$ , determine el valor de dicha integral de línea.

**Solución:** En el ejemplo 6.15 ya se demostró que  $F$  es conservativo y se determinó que su función potencial es  $f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + K$ , con  $K \in \mathbb{R}$ , entonces la integral de línea  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Ahora se va usar el teorema fundamental para

---

<sup>5</sup>Otra forma para determinar la función potencial viene dada por

$$f(x, y, z) = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz,$$

donde para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variable  $x$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con la variables  $x$  y  $y$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int y^2 \cos x dx + \int e^{2z} dy + \int 0 dz \\ &= y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

integrales de línea (teorema 6.4) con el fin calcularla, esto es

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = f(2,3) - f(0,1) = 70 + K - (4 + K) = 66.$$

**Ejemplo 6.40** Calcule  $I = \int_{\mathcal{C}} (2x + yz)dx + (2y + xz)dy + (xy)dz$  donde  $\mathcal{C}$  es la curva dada por

$$r(t) = \left( t^2(1+t), \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right), \frac{t^2+1}{t^3+1} \right) \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

**Solución:** Si la integral  $I$  se calcula mediante la forma tradicional observe que quedaría una integral engorrosa de resolver. Esto permite intuir que quizás dicha integral de línea sea independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Para ello, defina el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2x + yz, 2y + xz, xy),$$

siendo  $f_1(x, y, z) = 2x + yz$ ,  $f_2(x, y, z) = 2y + xz$  y  $f_3(x, y, z) = xy$ . Note que en el ejemplo 6.12 ya se demostró que  $F$  es conservativo, por tanto, efectivamente, la integral de línea  $I$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Además, en ese mismo ejemplo se determinó que

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + K$$

es la función potencial de  $F$ . Para calcular  $I$  usando el teorema fundamental para integrales de línea (teorema 6.4), se necesita un punto inicial  $A$ , que claramente ocurre en  $t = 0$ , es decir,  $A = r(0) = (0, 1, 1)$ , y un punto final  $B$  que corresponde cuando  $t = 1$ , esto es,  $B = r(1) = (2, 0, 1)$ . Entonces:

$$I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f \Big|_{(0,1,1)}^{(2,0,1)} = f(2, 0, 1) - f(0, 1, 1) = 4 + K - (1 + K) = 3.$$

**Ejemplo 6.41** Sea el campo vectorial  $F(x, y, z) = (2xyz + y^2z, x^2z + 2xyz, x^2y + xy^2)$ .

1. Muestre que  $F$  es irrotacional.
2. Calcule  $f$  tal que  $\nabla f = F$  y use esto para hallar  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde  $\mathcal{C}$  es la curva dada por la ecuación vectorial

$$r(t) = (1+t, 1+2t^2, 1+3t^3) \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1.$$

**Solución:** Para mostrar que  $F$  es irrotacional se debe comprobar que  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ , en efecto, si se define  $f_1(x, y, z) = 2xyz + y^2z$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2z + 2xyz$  y  $f_3(x, y, z) = x^2y + xy^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (x^2 + 2xy - (x^2 + 2xy), 2xy + y^2 - (2xy + y^2), 2xz + 2yz - (2xz + 2yz)) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Dado que  $F$  está definido sobre  $\mathbb{R}^3$  (el cual es convexo) y posee todas sus derivadas parciales de primer orden, en este punto se puede establecer que  $F$  es conservativo y debe existir su función potencial, la cual es

$$f(x, y, z) = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz,$$

donde para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variable  $x$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con la variables  $x$  y  $y$ , esto es

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int 2xyz + y^2z dx + \int 0 dy + \int 0 dz \\ &= x^2yz + xy^2z + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es claro que  $\nabla f(x, y, z) = (2xyz + y^2z, x^2z + 2xyz, x^2y + xy^2) = F(x, y, z)$ . Para calcular  $I = \int_C F \cdot dr$  se usará el teorema fundamental para integrales de línea, para lo cual se necesita un punto inicial  $A$  que ocurre en  $t = 0$ , es decir,  $A = r(0) = (1, 1, 1)$  y un punto final  $B$  que se da en  $t = 1$ , así,  $B = r(1) = (2, 3, 4)$ . Con esta información se tiene que

$$I = \int_C F \cdot dr = f \Big|_{(2,3,4)}^{(1,1,1)} = f(2, 3, 4) - f(1, 1, 1) = 48 + 72 + K - (1 + 1 + K) = 118.$$

**Ejemplo 6.42** Determine el valor de

$$I = \int_C (2x \sen y + 5yz)dx + (x^2 \cos y - 6ye^z + 5xz)dy + (5xy - 3y^2e^z)dz,$$

donde la curva está dada por

$$C := \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy + 2xz + 2yz = 9 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

desde  $A = (1, 0, 1)$  hasta  $B = (0, 1, 1)$ .

**Solución:** Observe que si se desea hacer la integral de línea mediante el método tradicional, la parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  resulta ser compleja. Esto hace prever que quizás dicha integral  $I$  sea independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . En efecto, note que  $F(x, y, z) = (2x \operatorname{sen} y + 5yz, x^2 \cos y - 6ye^z + 5xz, 5xy - 3y^2e^z)$  definido sobre  $\mathbb{R}^3$  (el cual es un conjunto convexo), siendo  $f_1(x, y, z) = 2x \operatorname{sen} y + 5yz$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2 \cos y - 6ye^z + 5xz$  y  $f_3(x, y, z) = 5xy - 3y^2e^z$ . Con ello, primero se calcula el rotacional de  $F$ , que viene dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (5x - 6ye^z - (-6ye^z + 5x), 5y - 5y, 2x \cos y + 5z - (2x \cos y + 5z)) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Así  $F$  es irrotacional y consecuentemente es conservativo. Además se tiene que la integral de línea  $I$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . En segunda instancia se procede a buscar la función potencial de  $F$ , la cual está dada por

$$f(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} y - 3y^2e^z + 5xyz + K \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Luego, como tercer y último paso, y por el teorema fundamental para integrales de línea, se cumple que

$$I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f \Big|_{(1,0,1)}^{(0,1,1)} = f(1, 0, 1) - f(0, 1, 1) = -3e.$$

**Ejemplo 6.43** Considere el campo gravitatorio de la tierra dado por  $F(x, y, z) = \frac{-mQG}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$  y definido en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ , en donde  $\vec{x} = (x, y, z)$  y  $m, Q, G \in \mathbb{R}^+$ .

1. Muestre que este campo cumple con las condiciones necesarias para ser conservativo y halle su función potencial.
2. Determine el trabajo realizado por el campo dado al mover una partícula del punto  $A(3, 4, 12)$  al punto  $B(2, 2, 0)$  a lo largo de una curva diferenciable  $\mathcal{C}$ .

**Solución:**

1. Observe que el campo vectorial está dado por

$$F(x, y, z) = \left( \frac{-mQGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mQ Gy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-mQGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right),$$

## 6.4. Integral de línea

siendo  $f_1(x, y, z) = \frac{-mQGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ,  $f_2(x, y, z) = \frac{-mQ Gy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$  y  $f_3(x, y, z) = \frac{-mQGz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ . Este campo está definido sobre  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ , el cual es conexo abierto. Para mostrar que este campo cumple con las condiciones necesarias para ser conservativo, se va a verificar que es irrotacional. En efecto, note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial y} &= \frac{3mQGzy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= \frac{3mQGxz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{3mQGxy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_1}{\partial y}.\end{aligned}$$

Con estos resultados es claro que  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ , es decir,  $F$  es irrotacional. Posteriormente, la función potencial viene dada por

$$f(x, y, z) = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz,$$

donde para  $f_2$  se desaparecen los términos con la variable  $x$  y para  $f_3$  se desaparecen los términos con las variables  $x$  y  $y$ , esto es

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \int \frac{-mQGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx + \int 0 dy + \int 0 dz \\ &= \frac{mQG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + K, \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

No es difícil comprobar que  $\nabla f = F$ , así  $F$  es conservativo.

2. Se debe calcular  $W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , la cual es independiente del camino de  $\mathcal{C}$  ya que  $F$  es conservativo. Así, usando el teorema fundamental para integrales de línea se tiene que

$$\begin{aligned}W &= f(B) - f(A) \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mQG}{2\sqrt{2}} - \frac{mQG}{13} \\ &= mQG \frac{13\sqrt{2} - 4}{52}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 6.44** Sea  $y > 0$ , calcule  $I = \int_{\mathcal{C}} e^x \ln y dx + \left(\frac{e^x}{y} + \text{sen } z\right) dy + y \cos z dz$ , donde  $\mathcal{C}$  es una curva con punto inicial  $(1, 1, \frac{\pi}{2})$  y punto final  $(2, 2, 0)$ .

**Solución:** Es claro que no hay una curva explícita, sin embargo, se brinda el punto inicial y el punto final de la curva. Esto hace intuir que  $I$  sea independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$ . Defina  $F(x, y, z) = \left( e^x \ln y, \frac{e^x}{y} + \operatorname{sen} z, y \cos z \right)$ , siga como referencia los ejemplos anteriores:

- Muestre que  $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$ , es decir, que  $F$  es irrotacional, así se cumple con las condiciones necesarias para que  $F$  sea un campo vectorial conservativo.
- Obtenga la función potencial de  $F$ , la cual que viene dada por

$$f(x, y, z) = e^x \ln y + y \operatorname{sen} z + K \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Con ello, concluya que  $I$  es independiente de la trayectoria de la curva descrita por  $\mathcal{C}$ .

- Calcule la integral  $I$  usando el teorema fundamental para integrales de línea, esto es

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}} e^x \ln y \, dx + \left( \frac{e^x}{y} + \operatorname{sen} z \right) dy + y \cos z \, dz \\ &= f(B) - f(A) \\ &= f(2, 2, 0) - f\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 + e^2 \ln 2, \end{aligned}$$

siendo este el resultado solicitado en el ejemplo.

## Ejercicios

**Ejercicio 264** Calcule la integral de línea  $\oint_{\mathcal{C}} (x + y) \, ds$  donde  $\mathcal{C}$  es un triángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ , recorrida en sentido antihorario.

**Ejercicio 265** Determine el valor de la integral  $I = \oint_{\mathcal{C}} f \, ds$ , donde  $f(x, y) = |x| + |y|$  y la curva  $\mathcal{C}$  es el círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ , recorrida en sentido positivo.

**Ejercicio 266** Halle el valor de la integral de línea  $I = \oint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) \, ds$  donde  $\mathcal{C}$  es la curva parametrizada por  $r(t) = (2(\cos t + t \operatorname{sen} t), 2(\operatorname{sen} t - t \cos t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Ejercicio 267** Determine el valor de la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$ , donde  $\mathcal{C}$  es la primera espiral de la hélice  $r(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, at)$ .

**Ejercicio 268** Determine el valor de la integral  $I = \oint_{\mathcal{C}} f \, ds$ , donde  $f(x, y) = \sqrt{2(1 - xy)}$  y la curva  $\mathcal{C}$  es

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -x - y + z = 6 \end{cases}$$

**Ejercicio 269** Sea  $\mathcal{C}$  la curva de intersección entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $y + z = 0$ .

1. Halle una parametrización trigonométrica para la curva  $\mathcal{C}$ .

2. Considere el campo escalar  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$ . Muestre que  $I = \oint_{\mathcal{C}} f \, ds = 2\pi$ .

**Ejercicio 270** Calcule la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  sobre el campo vectorial  $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$  y donde la curva  $\mathcal{C}$  corresponde a la parábola  $y = x^2$  desde el punto  $(-1, 1)$  hasta el punto  $(1, 1)$ .

**Ejercicio 271** Determine el valor de la integral de línea  $I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  sobre el campo vectorial  $F(x, y) = (2a - y, x)$ , para  $a \in \mathbb{R}$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  es el cicloide parametrizado por  $r(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Ejercicio 272** Considere el campo vectorial  $F : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Sea  $\mathcal{C}_k$  una curva descrita por  $r_k(t) = (a \cos t, a \sin t)$ , donde  $t \in [0, k\pi]$ ,  $0 < k \leq 2$ . Esta curva realmente corresponde un pedazo del círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  con ángulo central  $k\pi$ . Muestre que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = k\pi$$

**Ejercicio 273** Calcule las siguientes integrales de línea.

1.  $I = \int_{\mathcal{C}} yx^2 \, dx + y \, dy$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  es la elipse  $y^2 + 2x^2 - 2ax = 0$ .

2.  $I = \int_{\mathcal{C}} y^2 \, dx + xy \, dy + xz \, dz$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  se genera de la intersección entre las superficies  $x^2 + y^2 = 1$  y  $y - z = 0$ .

3.  $I = \oint_{\mathcal{C}} (x+2) dx + 3z dy + y^2 dz$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  se genera de la intersección entre las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y  $x - z = 1$ .

**Ejercicio 274** Sea  $\mathcal{C}$  la curva de intersección entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$ , con  $a > 0$ . El sentido de dicha curva es de  $(0, 0, a)$  hasta  $(0, a, 0)$ .

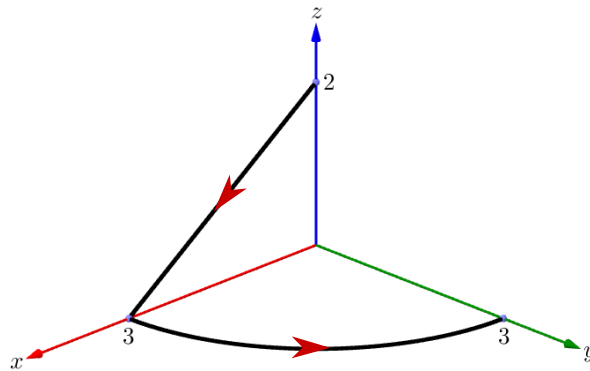
1. Muestre que una parametrización de dicha curva es

$$r(t) = \left( \frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin t, a \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right) \text{ con } t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

**Sugerencia:** use el hecho que  $\frac{1 - \sin t}{2} = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right)}{2} = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)$  y suponga que  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \geq 0$ .

2. Calcule la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde  $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ .

**Ejercicio 275** Halle el valor de la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , siendo  $F(x, y, z) = (3x^2yz - 3y, x^3z + 3x, x^3y + 2z)$  y la curva  $\mathcal{C}$  une los puntos  $(0, 0, 2)$  y  $0, 3, 0$  de la siguiente manera: un segmento de recta desde  $(0, 0, 2)$  hasta  $(3, 0, 0)$ , y luego por un arco circular (parte de un círculo), en el plano  $z = 0$ , desde  $(3, 0, 0)$  hasta  $(0, 3, 0)$ , como se aprecia en la figura adjunta.



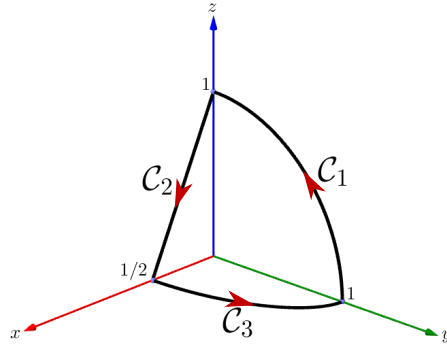
**Ejercicio 276** Calcule la integral  $I = \oint_{\mathcal{C}} x^2y dx + 2y dy + x dz$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  es cerrada simple y regular a trozos ubicada en el primer octante, dada por  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$  tales que

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \mathcal{C}_2 = \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ y } \mathcal{C}_3 = \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$



## 6.4. Integral de línea

según lo muestra la siguiente figura.



**Ejercicio 277** Determine el valor de la integral de línea

$$I = \oint_{\mathcal{C}} xze^y dx - xze^y dy + z dz,$$

donde  $\mathcal{C}$  se ubica en el primer octante y que encierra el plano  $x + y + z = 1$ , y con orientación horario vista desde el origen.

**Ejercicio 278** Considere el campo vectorial definido por  $F(x, y) = (2xy, x^2)$ . Verifique que la integral de línea  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  tiene el mismo valor para cualquier curva  $\mathcal{C}$  desde el punto  $(1, 2)$  hasta el punto  $(3, 2)$  y halle ese valor.

**Ejercicio 279** Determine el valor de la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

y la curva  $\mathcal{C}$  está parametrizada por  $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin(3t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Sugerencia:** muestre que  $F$  es conservativo y halle el valor de  $I$  usando su función potencial.

**Ejercicio 280** Considere la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (e^{t^2} \sin(\pi t), t^2 - 2t)$ , donde  $t \in [0, 1]$ , y el campo vectorial  $F(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$ . Halle el valor de  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ .

**Sugerencia:** muestre que  $F$  es conservativo y halle el valor de  $I$  usando su función potencial.

**Ejercicio 281** Sea el campo vectorial definido por  $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ .

1. Verifique que  $F$  sea conservativo y halle su función potencial.

2. Halle el valor de la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  está parametrizada por  $r(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$  con  $t \in [0, \pi]$ .

**Ejercicio 282** Pruebe que la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$  es independiente del camino que une el punto  $(1, 2)$  con el punto  $(3, 4)$ . Además calcule el valor de la integral  $I$  de las siguientes dos formas:

1. Parametrizando  $\mathcal{C}$  como un segmento desde el punto  $(1, 2)$  hasta el punto  $(3, 4)$ .
2. Usando la función potencial de  $F$ .

**Ejercicio 283** Dado el campo de fuerzas  $F(x, y) = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1)$ .

1. Muestre que  $F$  es conservativo hallando su función potencial.
2. Halle el trabajo  $W$  realizado cuando se mueve un objeto desde el punto  $(0, 0)$  hasta el punto  $(2, 0)$  a lo largo de la semicircunferencia  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  con  $y \geq 0$ .
3. Halle el trabajo  $W$  realizado al mover el objeto a lo largo de toda la circunferencia anterior.

**Ejercicio 284** Verifique que

$$\int_{\mathcal{C}} e^{x+y^2} dx + 2ye^{x+y^2} dy = e - e^{-1}$$

para cualquier curva  $\mathcal{C}$  regular a trozos que inicia en el punto  $(-1, 0)$  y termina en el punto  $(1, 0)$ .

**Ejercicio 285** Dado el campo vectorial  $F(x, y) = (x + y, x - y)$ .

1. Muestre que  $F$  es conservativo hallando su función potencial.
2. Usando la parte anterior y dada la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (\alpha(t), \beta(t))$  con  $a \leq t \leq b$ , pruebe que

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{1}{2} [(\alpha(b))^2 - (\beta(b))^2] + \alpha(b)\beta(b) - \frac{1}{2} [(\alpha(a))^2 - (\beta(a))^2] + \alpha(a)\beta(a).$$

**Ejercicio 286** Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$  al desplazar una partícula desde el origen hasta el punto  $(2, 0, 8)$ , siguiendo cualquier trayectoria o curva  $\mathcal{C}$  que una dichos puntos.

**Ejercicio 287** Calcular  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  siendo  $\mathcal{C}$  la curva de intersección entre las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  y  $z = x^2 + y^2$ , que va desde el punto  $A(0,0,0)$  hasta el punto  $B(1,0,1)$  con desplazamiento en el sentido horario, para un observador en el punto  $P(0,0,9)$ , donde el campo vectorial está definido por  $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + \sin z, y \cos z + 2)$ .

**Ejercicio 288** Dado el campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y}{3-z}, \frac{x}{3-z}, \frac{xy}{(3-z)^2} \right),$$

y se  $\mathcal{C}$  cualquier curva cerrada en el espacio, justifique por qué  $I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$ .

**Ejercicio 289** Calcular el trabajo  $W$  realizado por el campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y \operatorname{sen}(xy)}{1+z^2}, \frac{x \operatorname{sen}(xy)}{1+z^2}, \frac{2z \cos(xy)}{(1+z^2)^2} \right),$$

al trasladar una partícula a lo largo de la curva

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z = 5 \\ 8x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6yz - 14y - 9z = -2 \end{cases},$$

desde el punto  $A(0,1,3)$  hasta el punto  $B(1,0,2)$ .

**Ejercicio 290** Calcular la integral de línea

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy + z^2 e^x) dx + x^2 dy + 2ze^x dz$$

a lo largo de la curva

$$\mathcal{C} = \begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2 \\ yz + z^2 = 8x^2 + 12y^2 \end{cases},$$

desde el punto  $A(0,1,3)$  hasta el punto  $B(-1,-1,5)$ .

**Ejercicio 291** Sea el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (-z \sec^2 x + y^3 + 2, 3xy^2, -\tan x).$$

Calcule la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  con ecuación paramétrica  $r(t) = (t, \ln^2(1+t), 8t^3)$  con  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

## 6.5. Teorema de Green en el plano

Recuerde que una curva  $\mathcal{C}$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  con parametrización  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es regular a trozos cerrada simple si es la unión finita de curvas regulares que no se cortan entre sí, donde además  $r(a) = r(b)$ . También se supone que dicha curva es recorrida en dirección positiva (sentido antihorario). Además, una curva de este tipo es la frontera de una región conexa  $R$  en el plano, como se observa en la figura 6.17 siguiente:

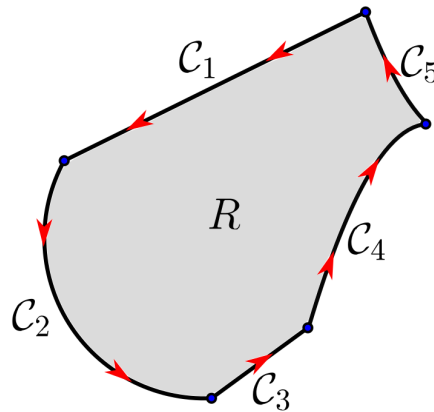


Figura 6.17: Curva cerrada simple regular a trozos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5$ , recorrida en sentido positivo, que encierra una región conexa  $R$

Se dice además que la región  $R$  se mantiene a la izquierda de  $\mathcal{C}$  cuando la dirección es positiva. Dicho de otra manera, suponga que se camina sobre la curva  $\mathcal{C}$  en sentido positivo, entonces la mano izquierda siempre apunta hacia la región  $R$ .

**Teorema 6.5 (Teorema de Green)** Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular a trozos cerrada simple recorrida en dirección positiva y sea  $R$  la región que consta de  $\mathcal{C}$  y su interior. Si  $f_1$  y  $f_2$  son funciones escalares continuas que tienen primeras derivadas parciales sobre una región abierta que contiene a  $R$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA.$$

**Observación 6.20** Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular a trozos cerrada simple recorrida en dirección positiva y sea  $R$  una región que consta de  $\mathcal{C}$  y su interior, tal que dicha región se puede descomponer en un número finito de subregiones por medio de cortes. Si se aplica el Teorema de Green a cada subregión obtenida y se suman los resultados, entonces la respuesta obtenida es igual que haber aplicado el Teorema de Green a la región general  $R$ . Por ejemplo, en particular considere la región  $R$  descrita en la figura 6.18.

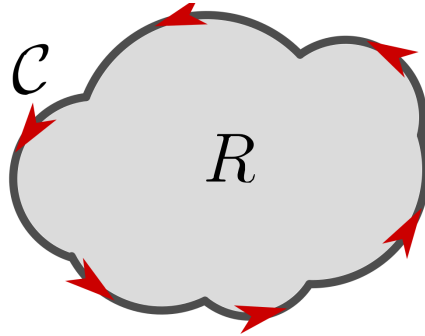


Figura 6.18: Región  $R$  que consta de la curva  $\mathcal{C}$  regular a trozos cerrada simple y su interior

Introduzca un corte de la región  $R$ , de tal manera que se formen dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$ , como lo muestra la figura 6.19.

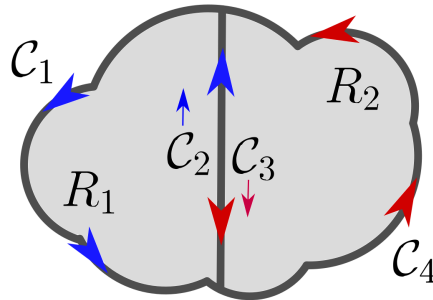


Figura 6.19: Región  $R = R_1 \cup R_2$

Observe que la subregión  $R_1$  está limitada por una curva regular a trozos cerrada simple recorrida en sentido positivo y que está formada por la unión de las curvas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . De forma similar, la subregión  $R_2$  está limitada por una curva regular a trozos cerrada simple orientada en sentido positivo y que está formada por la unión de las curvas  $\mathcal{C}_3$  y  $\mathcal{C}_4$ . Si se aplica el Teorema de Green a cada subregión se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \blacksquare \iint_{R_1} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA &= \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\mathcal{C}_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\mathcal{C}_2} f_1 dx + f_2 dy. \\ \blacksquare \iint_{R_2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA &= \oint_{\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\mathcal{C}_3} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\mathcal{C}_4} f_1 dx + f_2 dy. \end{aligned}$$

Posteriormente se suman los dos resultados anteriores, como sigue:

$$\int_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_2} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_3} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_4} f_1 dx + f_2 dy \quad (1).$$

Note que las curvas  $C_2$  y  $C_3$  son la misma, pero con orientación opuesta, esto implica que

$$\int_{C_2} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_3} f_1 dx + f_2 dy = 0.$$

Este resultado se usa en la ecuación (1), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_4} f_1 dx + f_2 dy &= \oint_{C_1 \cup C_4} f_1 dx + f_2 dy \\ &= \oint_C f_1 dx + f_2 dy \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA, \end{aligned}$$

esto por el Teorema de Green aplicado a la región  $R$ .

**Ejemplo 6.45** Calcule  $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$  si  $C$  es la curva que limita la región acotada por  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $y = x^2$  recorrida en dirección positiva.

**Solución:** Observe que la curva  $C$  es regular a trozos cerrada simple con orientación positiva, como lo muestra la figura 6.20.

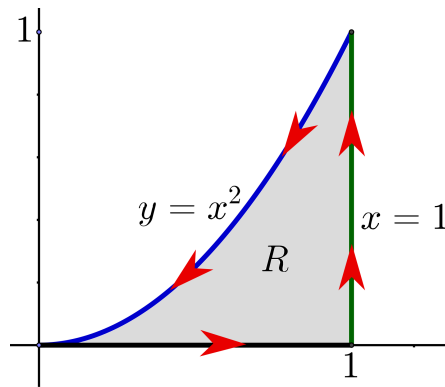


Figura 6.20: Región  $R$  acotada por la curva  $C$  regular a trozos cerrada simple

6.5. Teorema de Green en el plano

Defina  $f_1(x, y) = y^2$  y  $f_2(x, y) = x^2$ , las cuales tienen derivadas parciales continuas en la región  $R$  encerrada por  $\mathcal{C}$ . Con lo anterior es posible usar el Teorema de Green, esto es:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy &= \iint_R (2x - 2y) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (2x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 - x^4) dx \\ &= 3/10. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.46** Calcule  $\oint_{\mathcal{C}} (x + y)dx + (3x + \arctan y)dy$  si  $\mathcal{C}$  es la curva que limita la región acotada por  $y = x^2 - 1$ ,  $2y = 3 - 3x$  y  $x = -1$ .

**Solución:** Note que la curva  $\mathcal{C}$  es regular a trozos cerrada simple con orientación positiva, como lo muestra la figura 6.21.

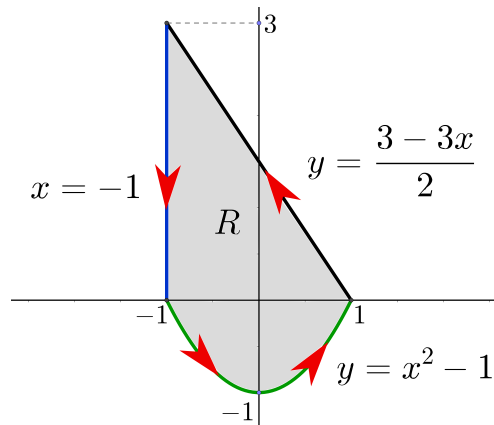


Figura 6.21: Región  $R$  acotada por la curva  $\mathcal{C}$  regular a trozos cerrada simple

Luego, defina  $f_1(x, y) = x + y$  y  $f_2(x, y) = 3x + \arctan y$ , las cuales tienen derivadas parciales continuas en la región  $R$ . Con lo anterior se usa el Teorema de Green, esto es:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} (x + y)dx + (3x + \arctan y)dy &= \iint_R (3 - 1) dA \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 (5 - 3x - 2x^2) dx \\ &= 26/3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.47** Calcule  $\oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$  si  $C$  es la elipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  recorrida en dirección positiva.

**Solución:** Claramente la curva elíptica dada encierra una región  $R$ . Defina  $f_1(x, y) = 2xy$  y  $f_2(x, y) = x^2 + y^2$ , ambas funciones con derivadas parciales continuas en  $R$ . Así, por el Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \iint_R (2x - 2x) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Observación 6.21** Según la observación 6.18, al resultar que

$$\oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = 0,$$

entonces dicha integral es independiente de la trayectoria de  $C$  y que  $F(x, y) = (2xy^2, x^2 + y^2)$  es conservativo.

**Ejemplo 6.48** Calcule  $\oint_C (4 + e^{\sqrt{x}}) \, dx + (\sin y + 3x^2) \, dy$  si  $C$  es la curva en dirección positiva que limita la región acotada por  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 = b^2$  con  $a < b$ , en el primer cuadrante.

**Solución:** La curva  $C$  y la región  $R$  se muestra en la figura 6.22 siguiente:

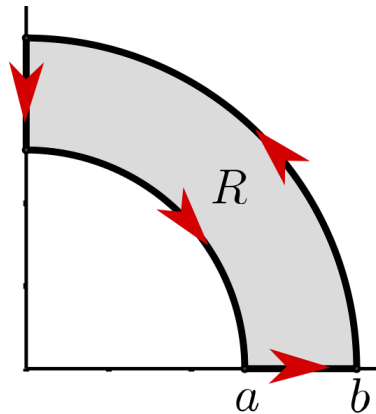


Figura 6.22: Región  $R$  acotada por la curva  $C$  regular a trozos cerrada simple



6.5. Teorema de Green en el plano

Defina  $f_1(x, y) = 4 + e^{\sqrt{x}}$  y  $f_2(x, y) = \sin y + 3x^2$ , ambas poseen derivadas parciales continuas en  $R$ . Por el Teorema de Green se cumple que:

$$\begin{aligned} \oint_C (4 + e^{\sqrt{x}})dx + (\sin y + 3x^2)dy &= \iint_R (6x - 0) dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_a^b 6r \cos \theta \cdot r dr d\theta, \text{ usando coordenadas polares.} \\ &= 2(b^3 - a^3) \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= 2(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.49** Sea  $F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$  y sea  $C$  la curva que limita la región  $R$ , determinada por las curvas  $y = x^2$  y  $x = y^2$ .

1. Calcule  $\oint_C F \cdot dr$  de manera directa.
2. Calcule  $\oint_C F \cdot dr$  utilizando el Teorema de Green.

**Solución:**

1. Un dibujo del camino  $C$  se muestra en la figura 6.23.

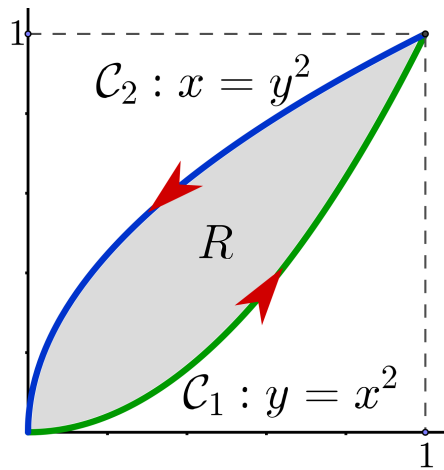


Figura 6.23: Región  $R$  acotada por la curva cerrada  $C = C_1 \cup C_2$

Note que  $C = C_1 \cup C_2$ , por tanto

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr.$$

Para la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_1$ , observe que la parametrización de esta trayectoria corresponde a  $r(t) = (t, t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ . Así:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_0^1 (2t^5 + 2t^3 + t^2)dt \\ &= 7/6. \end{aligned}$$

De forma parecida, para la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_2$ , note que la parametrización de esta trayectoria es  $r(t) = (t^2, t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Sin embargo, al hacer  $t = 0$  genera el punto  $(0, 0)$  y  $t = 1$  genera el punto  $(1, 1)$ , esto significa que la parametrización produce el recorrido de la curva en dirección opuesta, por lo que se debe agregar un signo negativo a la integral, esto por la observación 6.15. Así:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= - \int_0^1 (4t^4 - 2t^5 + 2t^2)dt \\ &= -17/15. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

2. Defina  $f_1(x, y) = 2xy - x^2$  y  $f_2(x, y) = x + y^2$ , ambas con derivadas parciales continuas en cualquier punto de la región descrita en la figura 6.23. Además, dado que la curva es regular a trozos cerrada simple y que se recorre en sentido positivo, por el Teorema de Green se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \iint_R (1 - 2x) dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= 1/30. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.50** Sea  $\mathcal{C}_a$  la circunferencia con radio  $a$  y centro en el origen, es decir,  $\mathcal{C}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ . Use el Teorema de Green para hallar el valor de  $\mathbf{a}$  que hace máximo la integral de línea  $\oint_{\mathcal{C}_a} y^3 dx + x dy$ .

**Solución:** Por el Teorema de Green y usando coordenadas polares se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_{C_a} y^3 dx + x dy &= \iint_R (1 - 3y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (1 - 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= a^2 \pi - \frac{3a^4 \pi}{4}.\end{aligned}$$

Defina la función real de variable real  $f(a) = a^2 \pi - \frac{3a^4 \pi}{4}$ , la cual es continua y diferenciable en  $\mathbb{R}$ . Se deben buscar los extremos máximos de esta función. Para ello, observe que

$$f'(a) = 2a\pi - 3a^3\pi,$$

la cual se iguala a cero para obtener sus números críticos, esto es:

$$\begin{aligned}2a\pi - 3a^3\pi &= 0 \\ \Rightarrow a\pi(\sqrt{2} - \sqrt{3}a)(\sqrt{2} + \sqrt{3}a) &= 0 \\ \Rightarrow a = 0, a = \sqrt{\frac{2}{3}}, a = -\sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Puesto que el valor  $a$  es positivo ya que corresponde a un radio de una circunferencia, se descarta los valores de  $a = 0$  y de  $a = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Faltaría verificar que el valor sobrante  $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$  sea un máximo de la función  $f(a)$ , para lo cual se usa el criterio de la Segunda Derivada para funciones reales de variable real. Con este fin, la segunda derivada de  $f(a)$  es

$$f''(a) = 2\pi - 9a^2\pi.$$

Luego, observe que  $f''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\pi - 6\pi = -4\pi < 0$ , entonces en  $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$  efectivamente está el valor máximo buscado, consecuentemente cuando  $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$  la integral de línea  $\oint_{C_a} y^3 dx + x dy$  produce su valor máximo.

**Observación 6.22** Es importante recordar la siguiente fórmula, denominada igualdad de Wallis, la cual puede ayudar a resolver algunas integrales.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

**Ejemplo 6.51** Use el Teorema de Green para calcular la integral de línea

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$$

donde  $\mathcal{C}$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = ax$ , recorrida en sentido positivo.

**Solución:** Sean  $f_1(x, y) = xy + x + y$  y  $f_2(x, y) = xy + x - y$ , ambas con derivadas parciales continuas en cualquier punto de la región encerrada por la curva  $\mathcal{C}$ , el cual se puede escribir como  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . Así, por el Teorema de Green y usando coordenadas polares se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy &= \iint_R (y - x) dA \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} (r \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{cos} \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{cos} \theta) r^2 dr d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{cos} \theta) \operatorname{cos}^3 \theta d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{cos}^3 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{cos}^4 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \left[ \left( \frac{\operatorname{cos}^4 \theta}{4} \right) \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{cos}^4 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{a^3}{3} \left( 0 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \text{ por la observación 6.22.} \\ &= -\frac{a^3 \pi}{8}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.52** Determine el valor la integral de línea  $I = \int_{\mathcal{C}} x^3 \operatorname{senh} x^5 dx + 4x dy$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  es la unión de los segmentos de recta que unen los puntos

$$A(-1, 0), B(2, 0), C(2, 1), D(1, 2), E(-1, 2), F(-2, 1), G(-2, -1) \text{ y } H(-1, -1),$$

siguiendo ese orden.

**Solución:** La curva  $\mathcal{C}$  se aprecia en la figura 6.24. Con ello, considere la nueva curva cerrada simple  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \overline{HA}$  y suponga que se recorre en sentido positivo. Además, defina  $f_1(x, y) = x^3 \sinh x^5$  y  $f_2(x, y) = 4x$ , ambas con derivadas parciales continuas.

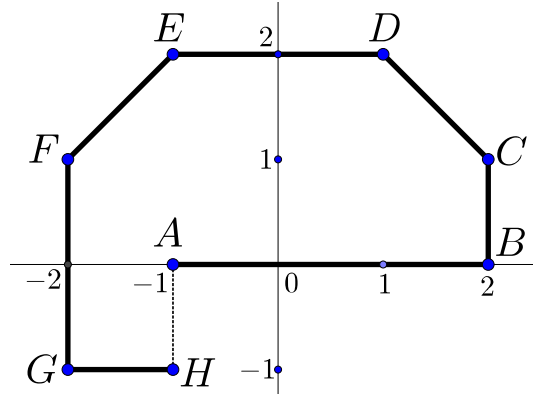


Figura 6.24: Curva  $\mathcal{C}$  que une los puntos  $A, B, C, D, E, F, G$  y  $H$

Usando el Teorema de Green sobre la región  $R$  del plano con frontera  $\mathcal{C}'$  se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}'} x^3 \sinh x^5 dx + 4x dy &= 4 \iint_R dA \\ &= 4A_R \\ &= 32. \end{aligned}$$

Luego, como  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \overline{HA}$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}'} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\overline{HA}} f_1 dx + f_2 dy,$$

con lo cual

$$\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = 32 - \int_{\overline{HA}} f_1 dx + f_2 dy.$$

Para calcular la integral de línea sobre  $\overline{HA}$ , el segmento de recta que une los puntos  $H$  y  $A$  se parametriza como  $r(t) = (1-t)H + tA = (-1, t-1)$  con  $t \in [0, 1]$ , con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{HA}} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy &= \int_{\overline{HA}} x^3 \sinh x^5 dx + 4x dy \\ &= \int_0^1 ((-1)^3 \sinh(-1)^5 \cdot 0 + 4(-1) \cdot 1) dt \\ &= -4 \int_0^1 dt = -4. \end{aligned}$$

Con este resultado, finalmente se tendría que

$$\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = 28 - \int_{HA} f_1 dx + f_2 dy = 32 - -4 = 36.$$

**Observación 6.23** Si en el Teorema de Green se considera  $f_1(x, y) = -\frac{y}{2}$  y  $f_2(x, y) = \frac{x}{2}$ , ambas con derivadas parciales continuas, entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy &= \iint_R \left( \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} \right) dA \\ &= \iint_R 1 dA \\ &= A_R \text{ (Área de la región R)}. \end{aligned}$$

Este resultado se enuncia en el siguiente corolario.

**Corolario 6.2** Sea  $R$  una región limitada por una curva  $\mathcal{C}$  regular a trozos, cerrada y simple, recorrida en sentido positivo, entonces el área de  $R$  es

$$A_R = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx.$$

**Ejemplo 6.53** Use el teorema de Green para calcular el área de la región encerrada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Solución:** La parametrización de la curva descrita por la elipse dada es  $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , además suponga que dicha curva elíptica es recorrida en sentido positivo. Ahora, usando el corolario anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - (b \sin t \cdot -a \sin t)) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt \\ &= ab\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.54** Use el Teorema de Green para hallar el área encerrada por el hypocicloide de radio  $a$  definido por  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , el cual se describe en la figura 6.25.

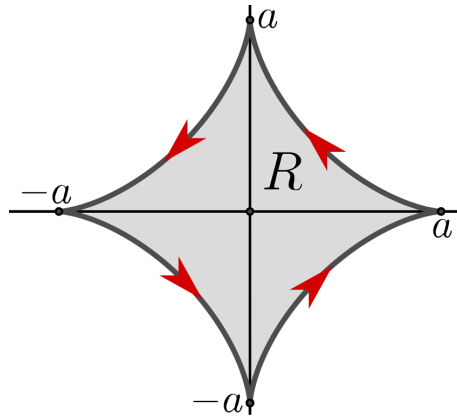


Figura 6.25: Hypocicloide de radio  $a$

**Solución:** Una parametrización para la curva descrita por el hypocicloide es  $r(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , la cual está recorrida en sentido positivo según la figura 6.25. Con ello se tiene que

$$\begin{aligned}
 A_R &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \\
 &= \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t - (a \sin^3 t \cdot -3a \cos^2 t \sin t)) dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t \cos^2 t) dt \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos t)^2 dt \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos(4t)}{2} \right) dt \\
 &= \frac{3a^2}{16} \left( t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} dt \\
 &= \frac{3a^2\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

**Teorema 6.6** (Teorema de Green para regiones con huecos) Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$   $n$  curvas regulares a trozos y cerradas simples, que tienen las siguientes propiedades:

1. Dos cualesquiera de esas curvas no se cortan.

2. Todas las curvas  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$  están situadas en el interior de  $\mathcal{C}_1$ .
3. La curva  $\mathcal{C}_i$  no está en el interior de la curva  $\mathcal{C}_j$  para cada  $i \neq j, i > 1$  y  $j > 1$ .
4. Se define la curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_n$ .

Una figura en particular que caracterice lo anterior es la número 6.26. Designe  $R$  la región que consiste en la unión de  $\mathcal{C}_1$ , con la porción del interior de  $\mathcal{C}_1$  que no está dentro de cualquiera de las curvas  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$ . Así la frontera de  $R$  es la curva  $\mathcal{C}$ . Sean  $f_1$  y  $f_2$  con derivadas parciales continuas sobre un conjunto abierto que contiene a  $R$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = \oint_{\mathcal{C}_1} f_1 dx + f_2 dy + \sum_{k=2}^n \oint_{\mathcal{C}_k}^+ f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA,$$

donde el símbolo  $\oint_{\mathcal{C}_k}^+$  denota la orientación positiva de las curvas  $\mathcal{C}_k$  con respecto a  $R$  (la región  $R$  se mantiene a la izquierda de  $\mathcal{C}_k$ ).

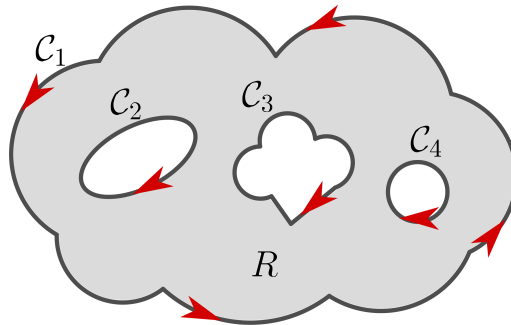


Figura 6.26: Región  $R$  con huecos acotada por la curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$

**Observación 6.24** Respecto al teorema 6.6 anterior, se debe considerar lo siguiente:

1. A las regiones con huecos como en la figura 6.26 se les llama regiones **múltiplemente conexas**<sup>6</sup>.
2. El símbolo  $\oint_{\mathcal{C}_k}^+$  no es obligado usarlo, siempre y cuando se considere el hecho que la región  $R$  se mantiene a la izquierda de  $\mathcal{C}_k$ .
3. A partir del resultado de este teorema, se dice que el Teorema de Green en el plano puede generalizarse a una región  $R$  con huecos, siempre que se integre **toda** la frontera manteniendo la orientación positiva, es decir que se mantenga la región  $R$  al lado **izquierdo** de  $\mathcal{C}$ .

<sup>6</sup>Una región sin huecos suele llamarse simplemente conexa.



6.5. Teorema de Green en el plano

4. Una particularidad de este teorema es cuando la región  $R$  consta de un solo hueco, siendo la frontera la curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , como lo muestra la figura 6.27, entonces se obtiene la fórmula siguiente:

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = \oint_{\mathcal{C}_1} f_1 dx + f_2 dy + \oint_{\mathcal{C}_2}^+ f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA.$$

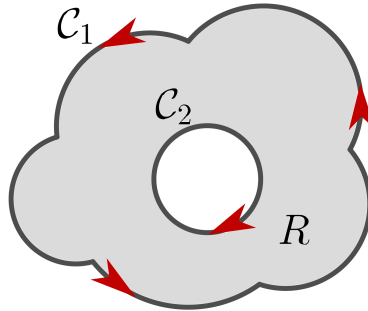


Figura 6.27: Región  $R$  con un solo hueco y con frontera  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  orientada positivamente

**Ejemplo 6.55** Sea  $F(x, y) = (x-y)\vec{i} + (x+y^3)\vec{j}$  definido sobre la región  $R$  en el plano  $xy$ , limitada por una curva  $\mathcal{C}_1$  regular, cerrada y simple ubicada en el exterior del círculo  $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 \leq 1$  (ver figura 6.28). Suponga que la región  $R$  tiene área 10. Muestre que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = 20 + 2\pi.$$

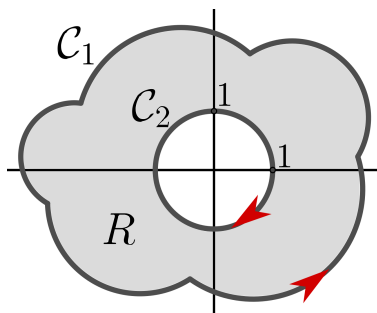


Figura 6.28: Región  $R$  y curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

**Solución:** Sea  $f_1(x, y) = x - y$  y  $f_2(x, y) = x + y^3$ . Por el teorema 6.6 se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} (x - y) dx + (x + y^3) dy + \oint_{\mathcal{C}_2}^+ (x - y) dx + (x + y^3) dy = \iint_R (1 - -1) dA.$$

De lo anterior se despeja la integral solicitada en el ejemplo, esto es

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_1} (x - y) dx + (x + y^3) dy &= 2 \iint_R dA - \oint_{\mathcal{C}_2}^+ (x - y) dx + (x + y^3) dy \\ &= 2 \cdot A_R - \oint_{\mathcal{C}_2}^+ (x - y) dx + (x + y^3) dy \\ &= 2 \cdot 10 - \oint_{\mathcal{C}_2}^+ (x - y) dx + (x + y^3) dy. \quad (1) \end{aligned}$$

Ahora, sea  $R'$  la región dentro de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , es decir, la frontera de  $R'$  es  $\mathcal{C}_2$ . Con ello, se va aplicar el Teorema de Green a  $R'$ , pero como  $\mathcal{C}_2$  no posee orientación positiva con respecto a  $R'$ , se le agrega un signo negativo, esto es:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_2}^+ (x - y) dx + (x + y^3) dy &= - \iint_{R'} (1 - -1) dA \\ &= -2 \iint_{R'} dA \\ &= -2 \cdot \pi \cdot (1)^2 \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

Este último resultado se cambia en la igualdad (1), obteniendo que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} (x - y) dx + (x + y^3) dy = 20 + 2\pi.$$

**Ejemplo 6.56** Considere la siguiente figura 6.29.

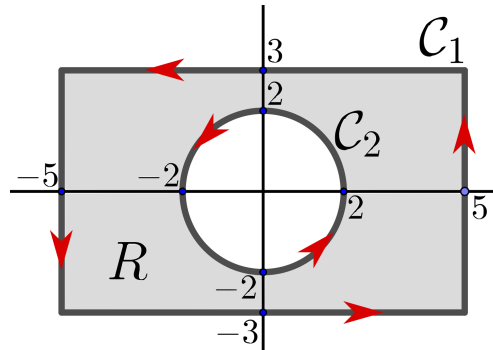


Figura 6.29: Región  $R$  acotada por  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

Sea  $\mathcal{C}_1$  la frontera del rectángulo,  $\mathcal{C}_2$  la frontera de la circunferencia y  $R$  la región entre ambas figuras. Suponga que  $\oint_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = 12$ , aplique el Teorema de Green para calcular  $\oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr$  si se sabe que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = -3,$$

## 6.5. Teorema de Green en el plano

en la región  $R$ , con  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

**Solución:** Por el teorema 6.6 se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr - \oint_{\mathcal{C}_2}^+ F \cdot dr = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA,$$

donde el signo negativo de la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_2$  se debe a que  $R$  debe quedar a la izquierda al recorrer la curva, aspecto que no sucede según el dibujo brindado. De la anterior igual se despeja la integral de línea sobre  $\mathcal{C}_1$ , esto es

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA + \oint_{\mathcal{C}_2}^+ F \cdot dr \\ &= \iint_R -3dA + 12 \\ &= -3 \iint_R dA + 12 \\ &= -3 \cdot A_R + 12 \end{aligned}$$

Según el dibujo aportado en el ejemplo, note que  $A_R$  corresponde al área del rectángulo de 6 unidades de ancho y 10 unidades de largo, menos el área del círculo de radio 2 unidades, entonces

$$A_R = 6 \cdot 10 - \pi \cdot (2)^2 = 60 - 4\pi.$$

Con este último resultado se obtiene que

$$\oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = -3 \cdot (60 - 4\pi) + 12 = 12\pi - 168.$$

**Ejemplo 6.57** Suponga que  $\mathcal{C}$  es una curva regular cerrada simple y sea  $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ .

1. Muestre que si  $\mathcal{C}$  no encierra al origen  $(0, 0)$ , entonces  $I = 0$ .
2. Muestre que si  $\mathcal{C}$  encierra al origen  $(0, 0)$ , entonces  $I = 2\pi$ .

**Solución:**

1. Suponga que la curva  $\mathcal{C}$  no encierra al origen  $(0, 0)$ . Tome  $f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$  y  $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , ambas continuas en la región  $R$  acotada por la curva  $\mathcal{C}$ . Luego se obtienen las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \blacksquare \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Ambas derivadas parciales también son continuas en la región  $R$  acotada por la curva  $\mathcal{C}$ , esto permite usar el Teorema de Green. Así:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_R \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0.$$

Esto a su vez demuestra que  $I$  es independiente de la trayectoria de  $\mathcal{C}$  siempre y cuando la región  $R$  no encierre el origen.

2. Ahora suponga que la curva  $\mathcal{C}$  encierra al origen  $(0, 0)$  y tome  $f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$  y  $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , ambas con derivadas parciales discontinuas en la región encerrada por  $\mathcal{C}$ . Construya un círculo centrado en  $(0, 0)$  con radio  $a$  tan pequeño que el círculo esté enteramente contenido dentro de  $\mathcal{C}$ . Llame a la curva de dicha circunferencia  $\mathcal{C}_a$  y defina la región  $R$  a aquella que está dentro de  $\mathcal{C}$  y fuera de  $\mathcal{C}_a$ , como lo muestra la figura 6.30.

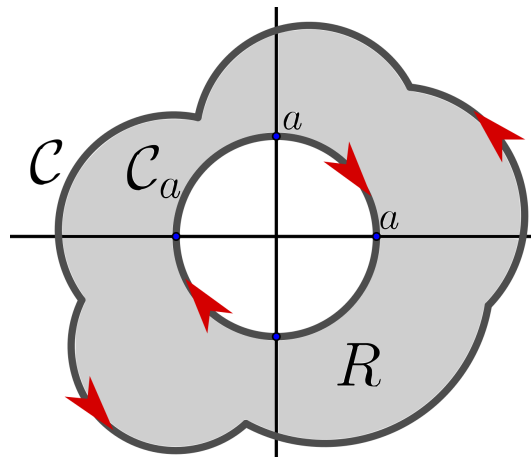


Figura 6.30: Región  $R$  acotada por  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_a$

6.5. Teorema de Green en el plano

Según el Teorema de Green para regiones con huecos (teorema 6.6), se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + \oint_{\mathcal{C}_a}^+ \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_R \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0.$$

De lo anterior se deduce que

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = - \oint_{\mathcal{C}_a}^+ \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

es decir,

$$I = \oint_{\mathcal{C}_a}^+ \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

puesto que  $\mathcal{C}_a$  posee dirección opuesta a  $\mathcal{C}$ . Luego se calcula  $\oint_{\mathcal{C}_a}^+ \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$  de forma directa, esto es parametrizando la curva  $\mathcal{C}_a$  como  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , así:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\mathcal{C}_a}^+ \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t \cdot -a \sin t + a \cos t \cdot a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.58** Considere la región  $R$  acotada por las curvas  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$  y  $x^2 + y^2 \geq 1$ . Calcule el área de  $R$  usando el Teorema de Green.

**Solución:** La región  $R$  corresponde al interior de la elipse  $\mathcal{C}_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  y exterior al círculo  $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 1$ , según se aprecia en la figura 6.31.

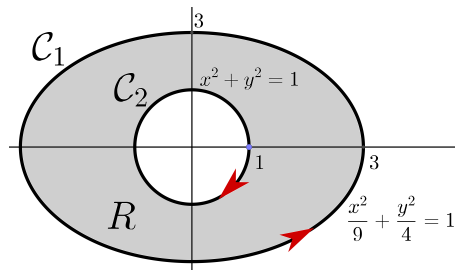


Figura 6.31: Región  $R$  acotada por  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

Defina  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , por el corolario 6.2 y por el teorema 6.6 se tiene que

$$A_R = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}_1} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_2}^+ xdy - ydx.$$

Observe que ambas curvas se parametrizan respectivamente como

$$r_1(t) = (3 \cos t, 2 \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{y}$$

$$r_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Con lo anterior, y considerando que  $\mathcal{C}_2$  posee dirección negativa, se tiene que

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}_1} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_2}^+ xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (6 \cos^2 t + 6 \operatorname{sen}^2 t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} (12\pi - 2\pi) \\ &= 5\pi. \end{aligned}$$

## Ejercicios

**Ejercicio 292** Use el Teorema de Green para calcular  $\oint_{\mathcal{C}} xy^3 dx + x^2y^2 dy$ , donde  $\mathcal{C}$  es la frontera del cuadrado con vértices  $A(0,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(1,1)$  y  $D(1,0)$ , recorrida en sentido positivo.

**Ejercicio 293** Con el Teorema de Green calcule la integral de línea

$$\oint_{\mathcal{C}} \left( e^{x^2} + \operatorname{sen}(y^2) \right) dx + \left( 2xy \cos(y^2) + xy^3 \right) dy,$$

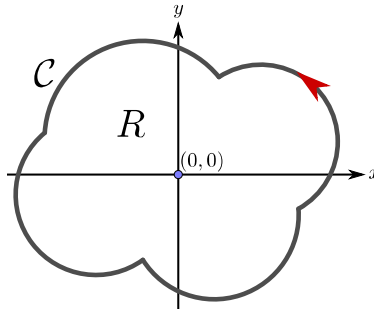
donde  $\mathcal{C}$  es la frontera del triángulo con vértices  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$  y  $C(1,1)$ , recorrida en sentido positivo.

**Ejercicio 294** Calcule  $\oint_{\mathcal{C}} \left( \arctan(x^{20}) - 2xy^2 + \cos(x^2) \right) dx + \left( x^2y + \operatorname{sen}(y^2) + e^{-y^2} \right) dy$  usando el Teorema de Green, donde  $\mathcal{C}$  es el borde de la región  $R$  ubicada en el primer cuadrante y delimitada por las gráficas de  $x = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 6$  y  $y^2 = x$ .

**Ejercicio 295** Considere el campo vectorial  $F(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ , aplique el Teorema de Green para hallar el valor de la integral  $\oint_C F \cdot dr$ , donde la curva  $C$  está formada por cuatro segmentos de recta que unen los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(4, 2)$ ,  $D(2, 0)$  y de regreso a  $A(0, 0)$ .

**Ejercicio 296** Sea  $C$  la curva cerrada que une el punto  $A(0, 1)$  con el punto  $B(1, 1)$  mediante un segmento de recta, luego une el punto  $B$  con el punto  $C(1, 2)$  mediante otro segmento, y finalmente el punto  $C$  con el punto  $A$  por medio de la parábola  $y = x^2 + 1$ . Verifique el Teorema de Green para esta curva  $C$  y el campo  $F(x, y) = (y + 1, -1)$ .

**Ejercicio 297** Aplique el Teorema de Green para calcular la integral de línea  $\oint_C F \cdot dr$ , donde el campo vectorial es  $F(x, y) = \left( \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2y}{x^2 + y^2}, \frac{2y^3 + 2x^2y + 2x}{x^2 + y^2} \right)$  y la curva  $C$  se muestra en la figura adjunta. **Sugerencia:** use como referencia la parte 2 del ejemplo 6.57.



**Ejercicio 298** Utilice el Teorema de Green para calcular

$$\oint_C e^x(1 - \cos y) dx + e^x(-y + \sin y) dy,$$

donde la curva  $C$  es la curva dada por  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , es decir, es la curva cerrada compuesta por la gráfica de la función seno y el segmento de recta sobre  $y = 0$ , desde  $(0, 0)$  hasta  $(\pi, 0)$ . **Sugerencia:** durante el desarrollo de la integral doble puede integrar por partes, tomando  $u = \sin^2 x$ ,  $dv = e^x$ , posteriormente use la fórmula

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 299** Emplee el Teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\oint_C \left( e^{\sqrt{x}} + 1 \right) dx + \left( x^2 + \cos \left( y^{\sqrt{2}} \right) \right) dy,$$

donde la curva  $\mathcal{C}$  es cerrada con dirección positiva y está ubicada en el primer cuadrante, la cual se forma por los arcos de circunferencia de radio 1 y radio 2, respectivamente y por los segmentos rectilíneos:  $1 \leq x \leq 2$ , en el eje  $x$ ;  $1 \leq y \leq 2$ , en el eje  $y$ .

**Ejercicio 300** Calcule la integral de línea

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x^2 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy,$$

donde la curva  $\mathcal{C}$  corresponde a la circunferencia recorrida en sentido antihorario dada por  $x^2 + y^2 = 1$ . **Sugerencia:** use el Teorema de Green.

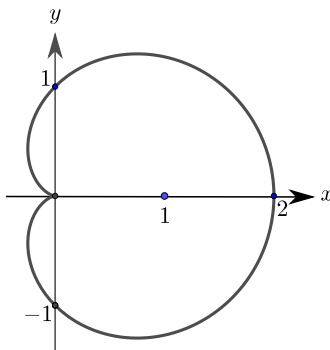
**Ejercicio 301** Calcule la integral de línea

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy,$$

donde la curva  $\mathcal{C}$  corresponde a la circunferencia  $x^2 + y^2 = ax$ . **Sugerencia:** use el Teorema de Green y puede servir el hecho que  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$  y aplicar la fórmula de Wallis, mostrada en la observación 6.22 de la página 389.

**Ejercicio 302** Considere la curva cerrada  $\mathcal{C}$  recorrida en sentido positivo y que rodea la región  $R$  acotada por  $x \leq 4 - y^2$  y  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ . Sea el campo vectorial  $F(x, y) = (x^3y^2 - 2x, x + y^2)$ , verifique el Teorema de Green.

**Ejercicio 303** Considere la curva  $\mathcal{C}$  que corresponde al cardiode con ecuación cartesiana  $x^2 - x + y^2 = x^2 + y^2$ , como se muestra en la figura adjunta<sup>7</sup>.



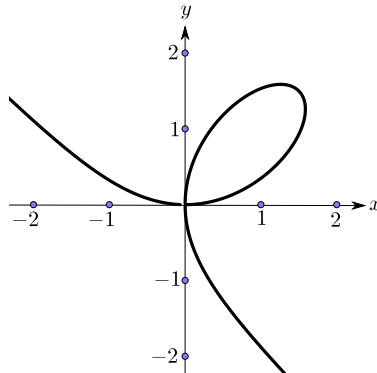
<sup>7</sup>En coordenadas polares no es difícil verificar que dicho cardiode tiene ecuación  $r = 1 + \cos \theta$ .



6.5. Teorema de Green en el plano

1. Muestre que la curva  $\mathcal{C}$  se puede parametrizar como  $r(t) = (\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \cos t))$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ .
2. Haciendo uso del punto anterior y el Teorema de Green, halle el área de la región  $R$  encerrada por la curva  $\mathcal{C}$ .

**Ejercicio 304** Considere la curva  $x^3 + y^3 = 3xy$ , llamada el *folium de Descartes*, la cual se aprecia en la figura adjunta.



1. Verifique que una parametrización de dicha curva es

$$r(t) = \left( \frac{3t}{t^3 + 1}, \frac{3t^2}{t^3 + 1} \right) \text{ con } t \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

2. Verifique que  $x dy - y dx = \frac{9t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$ .
3. Muestre que el área encerrada por el folium de Descartes en el primer cuadrante es  $\frac{3}{2}$ .  
**Sugerencia:** use el Teorema de Green y note que  $0 < t < +\infty$ .

## 6.6. Parametrización de superficies

**Definición 6.13 (Representación paramétrica de una superficie)** Una parametrización para una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es una función biyectiva y diferenciable  $r : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen es  $S$ , es decir,  $r(R) = S$ . La superficie  $S$  se puede escribir como

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

donde  $(u, v) \in R$ . Esta igualdad se suele denominar ecuación vectorial de la superficie  $S$ . A la región  $R$  se le suele llamar la proyección de  $S$  sobre el plano  $uv$  y se puede denotar como  $R_{uv}$ .

**Observación 6.25** Si en una superficie  $S$  con ecuación implícita de la forma  $F(x, y, z) = 0$ , se puede despejar  $z$  tal que  $z = z(x, y)$ , entonces la parametrización de la superficie  $S$  se puede escribir como

$$r(u, v) = (u, v, z(u, v)) \quad \text{con} \quad (u, v) \in R_{uv},$$

o bien

$$r(x, y) = (x, y, z(x, y)) \quad \text{con} \quad (x, y) \in R_{xy}.$$

Los siguientes ejemplos muestran la ecuación vectorial paramétrica de varias superficies.

**Ejemplo 6.59** Represente en forma paramétrica la superficie de la **esfera**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

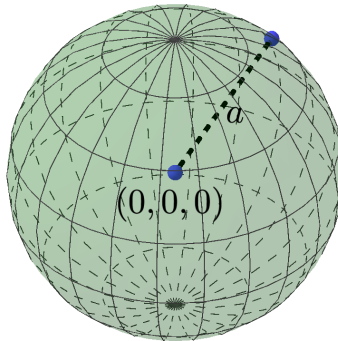


Figura 6.32: Esfera de radio  $a$  con centro en el origen

**Solución:** Usando las coordenadas esféricas, la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  posee la siguiente ecuación vectorial paramétrica

$$r(\phi, \theta) = (a \sen \phi \cos \theta, a \sen \phi \sen \theta, a \cos \phi),$$

## 6.6. Parametrización de superficies

donde  $(\phi, \theta) \in R_{\phi\theta} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . En este caso la proyección corresponde a un rectángulo en el plano  $\phi\theta$ .

**Observación 6.26** En la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  se puede despejar la variable  $z$  de forma implícita como sigue

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

En tal caso, al tomar  $z(x, y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  y por la observación 6.25, otra ecuación vectorial paramétrica de dicha superficie es

$$r(x, y) = \left( x, y, \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right),$$

donde  $R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , es decir, la proyección está en el plano  $xy$  y corresponde a un círculo centrado en el origen de radio  $a$ . Cabe destacar que al tomar la parte positiva de  $z(x, y)$  se está parametrizando la parte superior de la esfera ( $z \geq 0$ ), y al considerar la parte negativa se está parametrizando la parte inferior de la esfera ( $z \leq 0$ ).

**Ejemplo 6.60** Represente en forma paramétrica la superficie del **paraboloide**  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

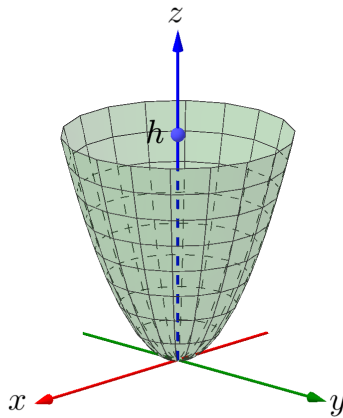


Figura 6.33: Paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con  $0 \leq z \leq h$

**Solución:** Utilizando coordenadas cilíndricas, el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  tiene la siguiente ecuación vectorial paramétrica:

$$r(z, \theta) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z^2)$$

donde  $(z, \theta) \in R_{z\theta} = [0, h] \times [0, 2\pi]$ . En este caso la proyección corresponde a un rectángulo en el plano  $z\theta$ .

**Observación 6.27** Por la observación 6.25, otra ecuación vectorial paramétrica para el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  con  $0 \leq z \leq h$ , se puede obtener de la siguiente forma: tome  $z(x, y) = x^2 + y^2$ , entonces una ecuación vectorial paramétrica del paraboloides dado es

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

donde  $R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (\sqrt{h})^2\}$ , es decir, la proyección está en el plano  $xy$  y corresponde a un círculo centrado en el origen de radio  $\sqrt{h}$ .

**Ejemplo 6.61** Represente en forma paramétrica la superficie del **cilindro**  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

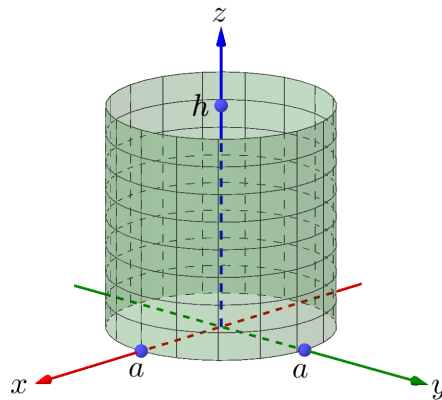


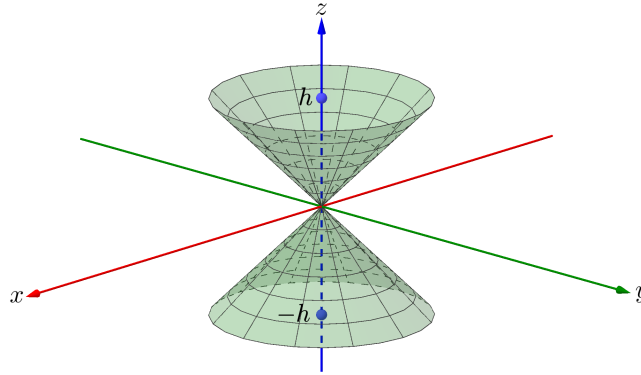
Figura 6.34: Cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  con  $0 \leq z \leq h$

**Solución:** Sea  $x = a \cos \theta$  y  $y = a \sin \theta$ , entonces una ecuación paramétrica vectorial del cilindro dado es

$$r(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z),$$

donde  $(\theta, z) \in R_{\theta z} = [0, 2\pi] \times [0, h]$ . Es claro que la proyección es un rectángulo en el plano  $\theta z$ .

**Ejemplo 6.62** Represente en forma paramétrica la superficie del **cono**  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $-h \leq z \leq h$ .

Figura 6.35: Cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $-h \leq z \leq h$ 

**Solución:** Note que la ecuación del cono se puede escribir como

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1,$$

lo cual permite sugerir su ecuación paramétrica vectorial usando coordenadas cilíndricas, esto es

$$r(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z),$$

donde  $(\theta, z) \in R_{\theta z} = [0, 2\pi] \times [-h, h]$ . En este caso también la proyección es un rectángulo en el plano  $\theta z$ .

**Observación 6.28** En el cono  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $-h \leq z \leq h$ , se puede despejar la variable  $z$  de forma implícita de la siguiente forma

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En este caso, al tomar  $z(x, y) = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$  y por la observación 6.25, otra ecuación vectorial paramétrica de dicha superficie es

$$r(x, y) = \left(x, y, \pm \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

donde  $R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq h^2\}$ , es decir, la proyección está en el plano  $xy$  y corresponde a un círculo centrado en el origen de radio  $h$ . Cabe destacar que al tomar la parte positiva de  $z(x, y)$  se está parametrizando la parte superior del cono ( $z \geq 0$ ), y al considerar la parte negativa se está parametrizando la parte inferior del cono ( $z \leq 0$ ).

**Ejemplo 6.63** Represente en forma paramétrica el **plano** de ecuación  $ax + by + cz = d$ .

**Solución:** Del plano dado se tiene que  $z = \frac{d-ax-by}{c}$ , suponiendo que  $c \neq 0$ . Con ello tome

$z(x, y) = \frac{d-ax-by}{c}$ , así una ecuación paramétrica vectorial de dicho plano es

$$r(x, y) = \left( x, y, \frac{d - ax - by}{c} \right),$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Observación 6.29** En el ejemplo pasado, suponiendo que  $a \neq 0$ , también se pudo haber despejado  $x$  y por tanto otra ecuación paramétrica vectorial del plano  $ax + by + cz = d$  es

$$r(y, z) = \left( \frac{d - by - cz}{a}, y, z \right) \quad \text{con } (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Análogamente, si  $b \neq 0$  y si se despeja  $y$ , entonces una tercera ecuación paramétrica vectorial del plano  $ax + by + cz = d$  es

$$r(x, z) = \left( x, \frac{d - ax - cz}{b}, z \right) \quad \text{con } (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

**Ejemplo 6.64** Represente en forma paramétrica la superficie  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ .

**Solución:** Note que la superficie es un plano de forma circular centrado en  $(0, 0, 0)$  y de radio 1 sobre el plano  $xy$  (o bien, plano  $z = 0$ ). Entonces, una ecuación paramétrica vectorial de esta superficie es

$$r(x, y) = (x, y, 0)$$

donde  $R_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Ejemplo 6.65** Represente en forma paramétrica la superficie plana cuyo borde es la curva

$$C = \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = z^2 \\ -y + z = 1 \end{cases}.$$

**Solución:** Observe que la superficie es la parte del plano  $-y + z = 1$  limitado por el cono  $2x^2 + 2y^2 = z^2$ , como lo muestra la parte coloreada de la figura 6.36.

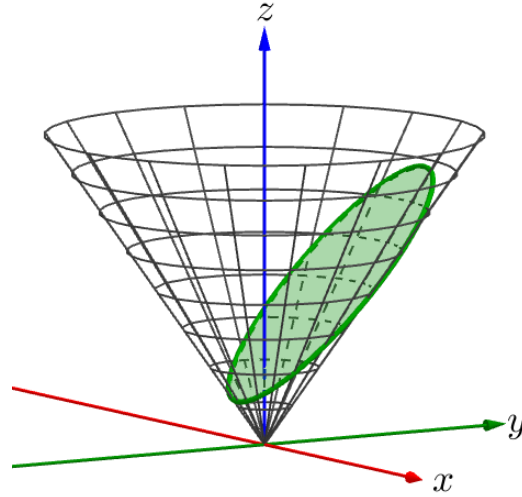


Figura 6.36: Superficie plana  $-y + z = 1$  limitada por el cono  $2x^2 + 2y^2 = z^2$

Para encontrar la proyección, del plano se obtiene que  $z = 1 + y$ , esto se cambia en el cono  $2x^2 + 2y^2 = z^2$ , se simplifica y se completa cuadrados, obteniendo la elipse

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1,$$

la cual se proyecta en el plano  $xy$ . Luego, despeje  $z$  del plano y tome  $z(x, y) = 1 + y$ , entonces una ecuación paramétrica vectorial de la superficie es

$$r(x, y) = (x, y, 1 + y),$$

donde  $R_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1 \right\}$ .

**Ejemplo 6.66** Represente en forma paramétrica la superficie del cono cuyo borde es la curva

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = z^2, & z \geq 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}.$$

**Solución:** La diferencia con el ejemplo pasado es que esta vez la superficie corresponde a la parte superior del cono  $2x^2 + 2y^2 = z^2$  limitado por el plano  $-y + z = 1$ , como se observa en la parte coloreada de la figura 6.37.

La proyección en el plano  $xy$  sigue siendo la elipse  $x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ , pero se despeja  $z$  del cono y se considera  $z(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ . Entonces, una ecuación paramétrica vectorial de la superficie es

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{2x^2 + 2y^2} \right),$$

donde  $R_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1 \right\}$ .

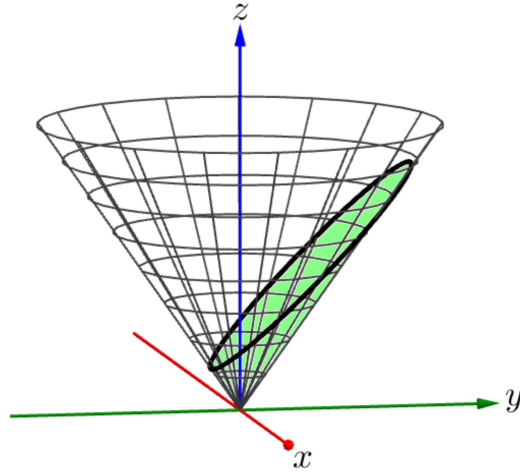


Figura 6.37: Superficie cónica  $2x^2 + 2y^2 = z^2$ ,  $z \geq 0$ , limitada por el plano  $-y + z = 1$

**Ejemplo 6.67** Represente en forma paramétrica la región del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$  y por encima del plano  $z = 0$ .

**Solución:** Como la superficie es la parte del cono y al ser  $z \geq 0$ , entonces se despeja  $z$  de  $z^2 = x^2 + y^2$  y se toma  $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para la proyección sobre el plano  $xy$  se halla la curva de intersección entre el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ , obteniendo la circunferencia

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Entonces, una ecuación paramétrica vectorial de la superficie es

$$r(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

donde  $R_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$ .

**Observación 6.30** En los ejemplos pasados se determina la ecuación paramétrica de algunas cuádricas básicas, entre ellas el paraboloides y el cono, sin embargo, es importante retomarlas y realizar un listado de las parametrizaciones de las otras cuádricas, las cuales se aprecian a continuación:

- Una parametrización del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  es

$$r(u, v) = (a \cos u \sen v, b \sen u \sen v, c \cos v), \text{ con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$



## 6.6. Parametrización de superficies

- Una parametrización del paraboloides elíptico de ecuación  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  corresponde a

$$r(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv^2), \text{ con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, +\infty[.$$

- Una ecuación paramétrica del paraboloides hiperbólico representado por  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  corresponde a

$$r(u, v) = (au, bv, c(u^2 - v^2)), \text{ con } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Además, otra parametrización de dicha superficie viene dada por

$$r(u, v) = (a(u + v), b(u - v), 4cuv), \text{ con } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- Una parametrización del hiperboloides de una hoja de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  corresponde a

$$r(u, v) = (a \cos u \cosh v, b \sin u \cosh v, c \sinh v), \text{ con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

- Una parametrización del hiperboloides de dos hojas de ecuación  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  corresponde a

$$r(u, v) = (a \cos u \sinh v, b \sin u \sinh v, c \cosh v), \text{ con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

- Una parametrización del cono elíptico representado por la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  corresponde a

$$r(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv), \text{ con } (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

## 6.7. Áreas de superficies

Sea  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  con  $(u, v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$  la parametrización de una superficie  $S$ , si  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  y  $z(u, v)$  poseen derivadas parciales continuas de primer orden, la derivada de  $r$  con respecto a  $u$  y con respecto a  $v$  se calcula como

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

respectivamente.

Por comodidad de notación, la derivada de  $r$  con respecto a  $u$  y con respecto a  $v$  suele escribirse como  $r_u = (x_u, y_u, z_u)$  y  $r_v = (x_v, y_v, z_v)$  de manera respectiva.

**Definición 6.14 (Superficie regular)** Sea  $S$  una superficie y sea  $r : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ , con derivadas continuas de primer orden. Se dice que  $S$  es una superficie regular o suave en  $(u, v)$  si

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq (0, 0, 0).$$

Si  $S$  se puede partir en un número finito de superficies regulares, se dice que  $S$  es regular a trozos.

**Observación 6.31** En la definición 6.14 anterior se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. El producto vectorial  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$  se denominará producto vectorial fundamental de la representación  $r$ .
2. Si  $S$  es una superficie que se puede escribir como  $z = z(x, y)$ , entonces

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = (-z_x, -z_y, 1) \neq (0, 0, 0).$$

De esta forma, si la superficie  $S$  se puede representar como  $z = z(x, y)$ , entonces  $S$  es regular en todo punto de su dominio.

**Teorema 6.7** Sea  $S$  una superficie regular con parametrización  $r : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  donde  $(u, v) \in R$ , entonces el área de la superficie  $S$  es

$$A_S = \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA.$$

**Observación 6.32** En referencia al teorema 6.7, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. Si  $S$  se expresa por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , donde  $S$  puede proyectarse uno a uno sobre el plano  $xy$  y si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente a  $z$  en función de  $x$  e  $y$ , es decir,  $z = z(x, y)$ , se tendría que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \|(-z_x, -z_y, 1)\| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}.$$

Entonces, el área de  $S$  viene dada por

$$A_S = \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA,$$

donde  $R$  es la proyección de  $S$  sobre el plano  $xy$ .

2. De igual forma, si  $S$  se expresa por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , donde  $S$  puede proyectarse uno a uno sobre el plano  $xy$  y si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente a  $z = z(x, y)$ , entonces, por el Teorema de la Derivada Implícita (teorema 3.13), se tiene que

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z},$$

con ello se cumple que

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA \\ &= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(-\frac{F_y}{F_z}\right)^2 + 1} dA \\ &= \iint_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dA. \end{aligned}$$

3. Si la superficie  $S$  es plana y paralela al plano  $xy$ , observe que  $S$  se puede parametrizar como

$$r(x, y) = (x, y, h),$$

donde  $h$  es un constante real y además  $(x, y) \in R \subset \mathbb{R}^2$ , donde es claro que  $R$  es una región proyectada sobre el plano  $xy$ . De esta manera se tiene que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \|(0, 0, 1)\| = 1,$$

entonces

$$A_S = \iint_R 1 \, dA = A_R,$$

es decir, el área de la superficie  $S$  equivale al área de la región  $R$  proyectada sobre el plano  $xy$ .

**Ejemplo 6.68** Sea  $R$  la región triangular del plano  $xy$  con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(1, 1, 0)$ . Calcule el área de la superficie de la parte de la gráfica  $z - 3x = y^2$  que se encuentra sobre  $R$ .

**Solución:** Un dibujo de la región corresponde a la figura 6.38.

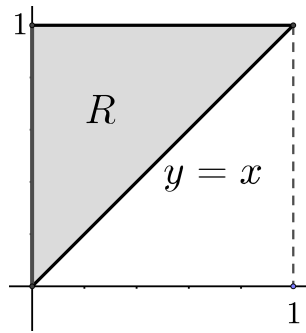


Figura 6.38: Región  $R$  en el plano  $xy$

Note que  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ . Tome  $z = 3x + y^2$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1 + 3^2 + (2y)^2} \, dx dy \\ &= \int_0^1 y \sqrt{10 + 4y^2} \, dx dy \\ &= \frac{14^{3/2} - 10^{3/2}}{12} \approx 1,73. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.69** Calcule el área de la superficie  $S$  limitada por el paraboloides  $z = 9 - x^2 - y^2$  y el plano  $z = 0$ .

**Solución:** La superficie se muestra en la figura 6.39. Observe que la superficie tiene ecuación

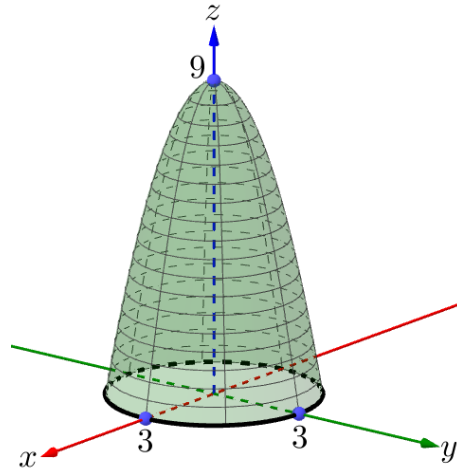


Figura 6.39: Superficie parabólica  $z = 9 - x^2 - y^2$  limitado por el plano  $z = 0$

vectorial paramétrica  $r(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$  con  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ . Tome  $z = 9 - x^2 - y^2$ , con esta información se tiene que

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\
 &= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{\pi (37^{3/2} - 1)}{6} \approx 117,31.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.70** Calcule el área de la región sobre el plano  $x + y + z = a$  limitada por el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ), como lo muestra la figura 6.40.

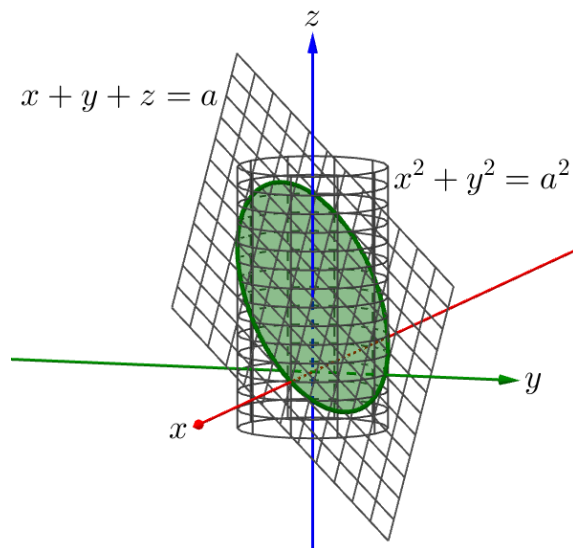


Figura 6.40: Región  $S$  sobre el plano  $x + y + z = a$  limitada por el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ )

**Solución:** En este caso la superficie  $S$  es plana, la cual se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, a - x - y)$  donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$  y proseguir de forma similar al ejemplo pasado.

También se puede definir  $F(x, y, z) = x + y + z - a$ , y aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dA \\
 &= \iint_R \frac{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}{|1|} dA \\
 &= \sqrt{3} \iint_R 1 dA \\
 &= \sqrt{3} A_R \\
 &= \sqrt{3} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.71** Sea  $a > 0$ . Determine el área de la porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  con  $z \geq 0$  que se halla en el interior del cilindro  $x^2 + y^2 = ay$ .

**Solución:** Primero al considerar la ecuación del cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  y completar cuadrados se obtiene que

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

## 6.7. Áreas de superficies

Con ello, la superficie  $S$  de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  con  $z \geq 0$  limitada por el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$  se muestra en la figura 6.41.

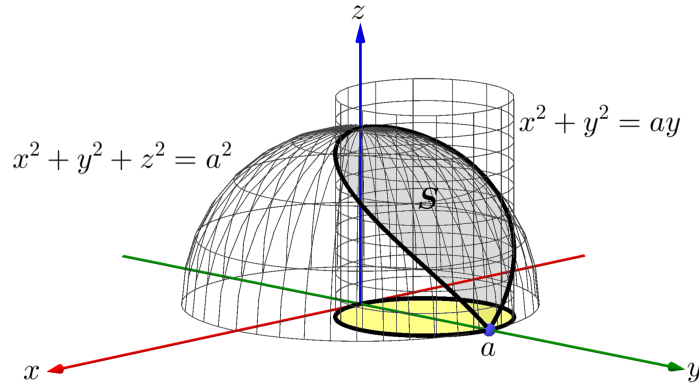


Figura 6.41: Superficie  $S$  de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  con  $z \geq 0$  limitada por el cilindro  $x^2 + y^2 = ay$

Además, la superficie  $S$  tiene como ecuación vectorial paramétrica a

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

donde  $(x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + \left( y - \frac{a}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$ . Entonces el área de la superficie  $S$  viene dada por

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\left( \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi -a \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_{r=0}^{r=a \operatorname{sen} \theta} \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 - |\cos \theta|) \, d\theta \\ &= a^2 \left[ \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta) \, d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (1 + \cos \theta) \, d\theta \right] \\ &= a^2 \left[ (\theta - \operatorname{sen} \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + (\theta + \operatorname{sen} \theta) \Big|_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \right] \\ &= a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.72** Determine el área de la porción de la esfera definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  con  $z \geq 0$  y  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , como lo muestra la figura 6.42.

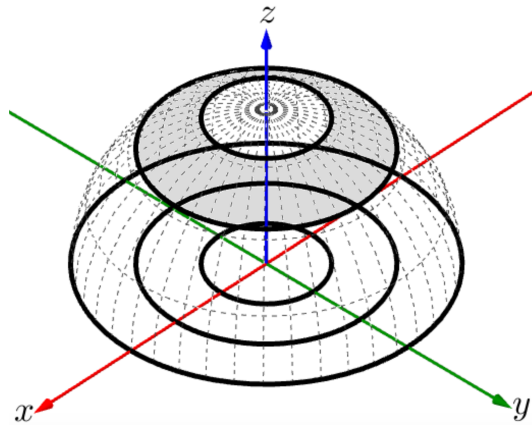


Figura 6.42: Porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  con  $z \geq 0$  y  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

**Solución:** De forma similar al ejemplo anterior, como  $z \geq 0$  de la esfera se tiene que  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Así, al parametrizar la la superficie  $S$  sombreada en la figura 6.42 se obtiene la siguiente ecuación vectorial

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Con esta información se tiene que

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\left( \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right)^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dA \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{r}{\sqrt{9 - r^2}} \, dr d\theta \\ &= 6\pi(2\sqrt{2} - \sqrt{5}). \end{aligned}$$



6.7. Áreas de superficies

**Ejemplo 6.73** Calcule el área del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  de altura  $h$ .

**Solución:** Observe que dicho cilindro se puede parametrizar como  $r(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ , donde  $(\theta, z) \in R = [0, 2\pi] \times [0, h]$ . Luego, note que

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0),$$

entonces  $\left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} = a$ . A partir de esto, el área buscada está dada por

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h a \, dz d\theta \\ &= 2\pi h a. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.74** Considere la superficie  $S$  dada por  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y \geq 0$  y  $2y \leq z \leq 12$ , como lo muestra la figura 6.43.

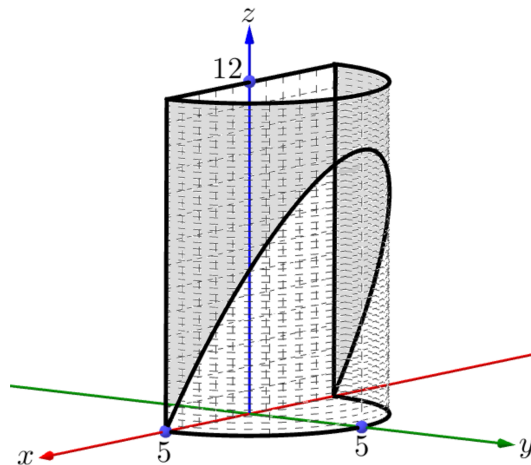


Figura 6.43: Superficie  $S$

1. Determine una parametrización de esta superficie en coordenadas cilíndricas.
2. Calcule el área de esta porción de superficie cilíndrica.

**Solución:**

1. Usando coordenadas cilíndricas en la superficie  $x^2 + y^2 = 25$  se deduce que  $x = 5 \cos \theta$  y  $y = 5 \operatorname{sen} \theta$ . Luego, observe que

$$2y \leq z \leq 12 \Rightarrow 10 \operatorname{sen} \theta \leq z \leq 12.$$

De esta forma, una ecuación vectorial paramétrica para la superficie  $S$  sombreada en la figura 6.43 es

$$r(\theta, z) = (5 \cos \theta, 5 \operatorname{sen} \theta, z),$$

donde  $(\theta, z) \in R = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 10 \operatorname{sen} \theta \leq z \leq 12\}$ .

2. Para el área, note primero que

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 \operatorname{sen} \theta & 5 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (5 \cos \theta, 5 \operatorname{sen} \theta, 0),$$

entonces  $\left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = 5$ . Así, el área buscada está dada por

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{10 \operatorname{sen} \theta}^{12} 5 \, dz d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} (12 - 10 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \\ &= 60\pi - 100. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.75** Mediante una ecuación vectorial en coordenadas esféricas, muestre que el área de la superficie  $S$  dada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  es  $A_S = 4\pi a^2$ .

**Solución:** Según el ejemplo 6.59, la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  posee la siguiente ecuación vectorial paramétrica en coordenadas esféricas,

$$r(\phi, \theta) = (a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi),$$

donde  $(\phi, \theta) \in R = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Luego se tiene que

## 6.7. Áreas de superficies

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \cos \phi \sin \theta). \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| &= a^2 \sqrt{\sin^4 \phi \cos^2 \theta + \sin^4 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= a^2 \sqrt{\sin^4 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= a^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

De esta forma el área de la superficie esférica viene dada por:

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi \, d\phi d\theta \\ &= 4\pi a^2, \end{aligned}$$

quedando así demostrado lo solicitado.

**Ejemplo 6.76** La superficie  $S$  tiene ecuación  $r(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k}$  con  $0 \leq u \leq 4$  y  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

1. Muestre que  $S$  es una superficie cuadrática, identificándola y dibujándola.
2. Verifique que existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A_S = \frac{\pi(65\sqrt{65} - 1)}{n}$ .

### Solución:

1. Sea  $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$  con  $(u, v) \in R = [0, 4] \times [0, 2\pi]$  la ecuación de la superficie  $S$ , con ello tome  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$  y  $z = u^2$ . Note que

$$x^2 + y^2 = (u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 = u^2 = z,$$

es decir,  $x^2 + y^2 = z$ , lo cual corresponde a la ecuación de un paraboloides cóncavo hacia arriba con vértice en el origen. Luego,

$$0 \leq u \leq 4 \Rightarrow 0^2 \leq u^2 \leq 4^2,$$

lo cual permite deducir que  $0 \leq z \leq 16$ . Con esta información, el dibujo de la superficie  $S$  corresponde al mostrado en la figura 6.44.

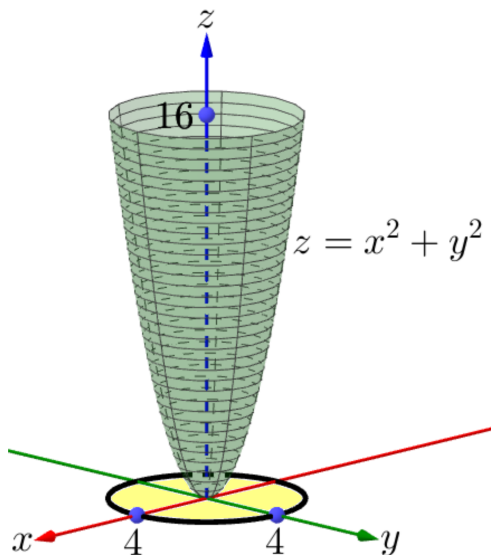


Figura 6.44: Superficie parabólica  $S$  limitada por  $z = x^2 + y^2$  con  $0 \leq z \leq 16$

- Para determinar el área de dicha superficie  $S$  se puede seguir trabajando con la ecuación vectorial paramétrica dada, o bien, se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 16\}$ . Entonces el área de  $S$  viene dada por

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi (65\sqrt{65} - 1)}{6}. \end{aligned}$$

Es claro que  $n = 6$ , lo que resuelve el ejemplo.

**Ejemplo 6.77** Considere la superficie conocida como el **toro** mostrada en la figura 6.45. Si dicha superficie está parametrizada por  $r(u, v) = (b + a \cos u) \cos v \vec{i} + (b + a \cos u) \sin v \vec{j} + a \sin u \vec{k}$  con  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq 2\pi$ , con  $a$  y  $b$  constantes, muestre que  $A_S = 4ab\pi^2$ .

6.7. Áreas de superficies

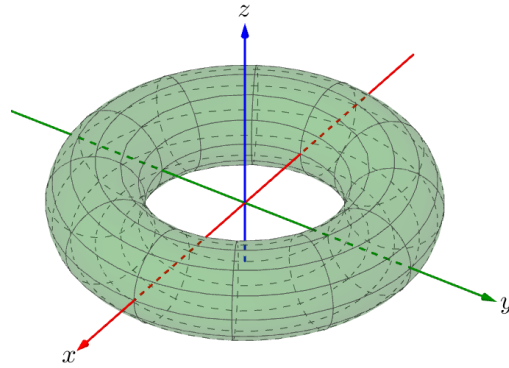


Figura 6.45: Superficie  $S$  conocida como el toro

**Solución:** Primero observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \operatorname{sen} u \cos v & -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \cos u \\ -(b + a \cos u) \operatorname{sen} v & (b + a \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-a(b + a \cos u) \cos u \cos v, -a(b + a \cos u) \cos u \operatorname{sen} v, \\ &\quad -a(b + a \cos u)(\cos^2 v \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v)) \\ &= -a(b + a \cos u) (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u). \end{aligned}$$

Con ello se tendría que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| &= a(b + a \cos u) \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= a(b + a \cos u) \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= a(b + a \cos u). \end{aligned}$$

Entonces el área del toro es

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \cos u) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} (abu + a^2 \operatorname{sen} u) \Big|_{u=0}^{u=2\pi} dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi ab dv \\ &= 2\pi abv \Big|_{v=0}^{v=2\pi} = 4ab\pi^2, \end{aligned}$$

lo que demuestra lo solicitado en el ejemplo.

**Observación 6.33** En relación con el punto 1 y el punto 2 de la observación 6.32, si  $S$  se expresa por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , donde  $S$  puede proyectarse uno a uno sobre el plano  $xz$  o  $yz$ , se pueden obtener las siguientes fórmulas:

1. Si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente a  $y$  en función de  $x$  y  $z$ , es decir,  $y = y(x, z)$ , se tendría que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = \|(-y_x, 1, -y_z)\| = \sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1}.$$

Entonces, el área de  $S$  viene dada por

$$A_S = \iint_R \sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1} \, dA,$$

donde  $R$  es la proyección de  $S$  sobre el plano  $xz$ . Asimismo, al usar el Teorema de la Función Implícita se obtiene la fórmula

$$A_S = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_y|} \, dA.$$

2. Si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente a  $x$  en función de  $y$  y  $z$ , es decir,  $x = x(y, z)$ , se tendría que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial y} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = \|(1, -x_y, -x_z)\| = \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1}.$$

Entonces, el área de  $S$  viene dada por

$$A_S = \iint_R \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1} \, dA,$$

donde  $R$  es la proyección de  $S$  sobre el plano  $yz$ . Análogamente, al utilizar el Teorema de la Función Implícita se obtiene la fórmula

$$A_S = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_x|} \, dA.$$

**Ejemplo 6.78** Calcule el área de la superficie  $S$  limitada por el paraboloides  $y = 4 - x^2 - z^2$  y el plano  $y = 0$ .

**Solución:** Un dibujo de la superficie  $S$  se muestra en la figura 6.46.

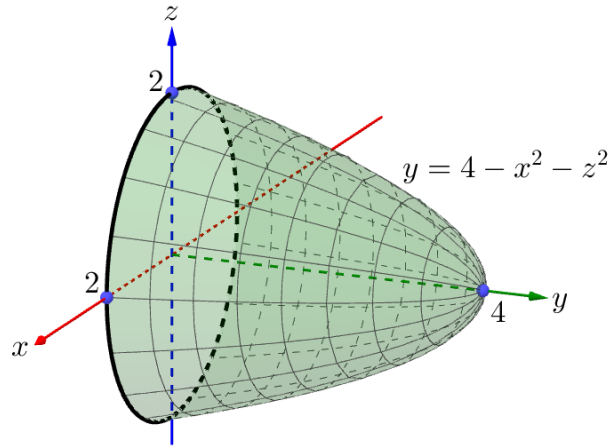


Figura 6.46: Superficie  $S$  limitada por el paraboloido  $y = 4 - x^2 - z^2$  y el plano  $y = 0$

Dicha superficie se puede parametrizar como  $r(x, z) = (x, 4 - x^2 - z^2, z)$  donde  $(x, z) \in R = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 4\}$ . Con ello se tendría que

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi (17^{3/2} - 1)}{6}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.79** Determine el área de la superficie cónica  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** Se va considerar la proyección de la superficie cónica sobre el plano  $yz$ . En tal caso, observe que al hacer  $x = 0$ , el cono y el cilindro se cortan en los puntos  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . La proyección de la superficie se muestra en la figura 6.47. Posteriormente, de la ecuación del cono se tiene que  $x = \sqrt{z^2 - y^2}$ , con ello tome  $x(y, z) = \sqrt{z^2 - y^2}$ , entonces una parametrización para la superficie en cuestión es

$$r(y, z) = \left( \sqrt{z^2 - y^2}, y, z \right), \text{ donde } (y, z) \in R_{yz}$$

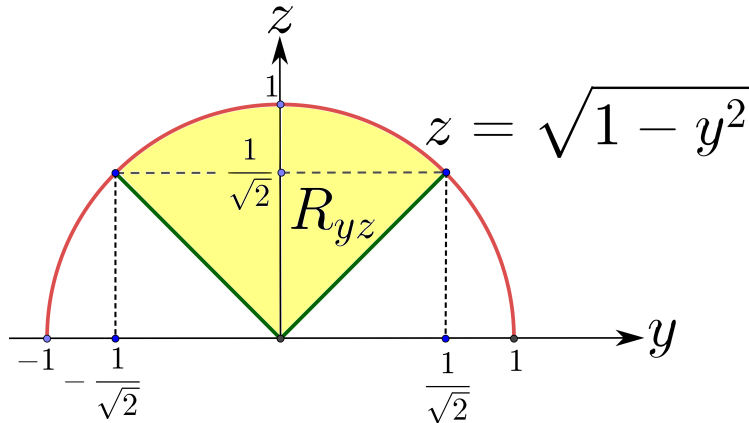


Figura 6.47: porción del cono  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ , y su proyección sobre el plano  $yz$

Luego, dado que la superficie es simétrica respecto al eje  $x$ , entonces solo se va considerar el primer octante, esto equivale a la mitad de la región  $R_{yz}$ . De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_{R_{yz}} \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1} \, dA \\
 &= 4 \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{y^2}{z^2 - y^2} + \frac{z^2}{z^2 - y^2} + 1} \, dz dy \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2 - y^2}} \, dz dy \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{1-y^2} u^{-1/2} \, du dy \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-2y^2} \, dy \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \, d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

**Observación 6.34** En el ejemplo 6.79, otra de forma de resolverlo es considerar la proyección sobre el plano  $xy$ , en cuyo caso la proyección está limitada por la curva de intersección formada por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$ , con  $z \geq 0$  y el cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ , la cual corresponde a la elipse  $x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$  (ver figura 6.48).



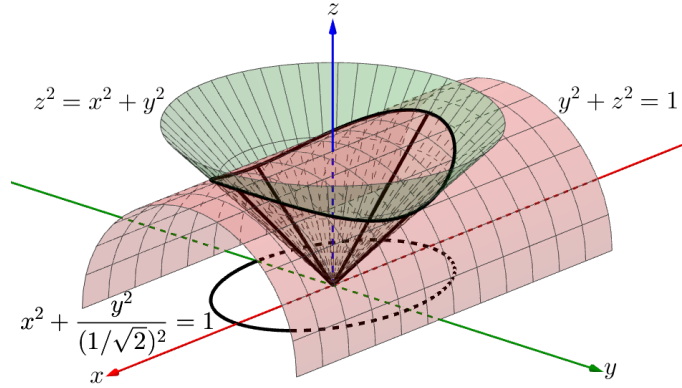


Figura 6.48: porción del cono  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ , y su proyección sobre el plano  $xy$

Luego, del cono se despeja  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , con ello tome  $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , así una parametrización para la superficie en cuestión corresponde a

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

con  $(x, y) \in R_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq 1 \right\}$ . Finalmente se tendría que<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_{R_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_{R_{xy}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA \\ &= \iint_{R_{xy}} \sqrt{2} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} 1 \, dA \\ &= \sqrt{2} A_{R_{xy}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.80** Determine el área de la superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$  que queda dentro del paraboloides  $az = x^2 + y^2$ , donde  $0 < a < c$ .

**Solución:** La esfera y el paraboloides se intersecan cuando  $z = 2c - a > 0$ , esto se obtiene de

<sup>8</sup>Para el resultado siguiente es importante recordar que el área de la región encerrada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $ab\pi$ .

la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x^2 + z^2 + (z - c)^2 &= c^2 \\
 \Rightarrow (x^2 + z^2) + z^2 - 2cz + c^2 &= c^2 \\
 \Rightarrow az + z^2 - 2cz &= 0 \\
 \Rightarrow z(a + z - 2c) &= 0 \\
 \Rightarrow z = 0 \quad \text{o} \quad z = 2c - a.
 \end{aligned}$$

Posteriormente, es claro que la intersección de las dos superficies ocurre en la parte superior de la esfera  $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$ , por tanto, despejando  $z$ , esta porción esférica se puede parametrizar como

$$r(x, y) = \left( x, y, c + \sqrt{c^2 - x^2 - y^2} \right),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a(2c - a)\}$ , es decir, la proyección es un círculo centrado en el origen y de radio  $\sqrt{a(2c - a)}$ . Ahora, dado que  $A_S = \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA$ , entonces se tiene que

- $z_x^2 = \frac{x^2}{c^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z_y^2 = \frac{y^2}{c^2 - x^2 - y^2}.$
- $z_x^2 + z_y^2 + 1 = \frac{x^2}{c^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{c^2 - x^2 - y^2} + 1 = \frac{c^2}{c^2 - x^2 - y^2}.$

Con lo anterior, y usando coordenadas polares, el área de superficie solicitada en el presente ejemplo viene dada por

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA \\
 &= c \iint_R \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} dA \\
 &= c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a(2c-a)}} \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr d\theta \\
 &= 2\pi ca.
 \end{aligned}$$

## 6.8. Integral de superficie

Una integral de superficie es a las superficies en el espacio lo que una integral de línea es a las curvas en el plano. Según esta relación, a continuación se define una integral de superficie sobre un campo escalar y luego una integral de superficie sobre un campo vectorial (que también suelen conocerse como integral de flujo).

### 6.8.1. Integral de superficie sobre un campo escalar

**Definición 6.15 (Integral de superficie sobre un campo escalar)** Sea  $R$  una región abierta y medible y sea  $S$  una superficie regular parametrizada por la función  $r(u, v)$  con primeras derivadas parciales continuas, donde  $(u, v) \in R$ , de modo que  $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \neq 0$  para todo  $(u, v) \in R$ ,  $r$  es una biyección entre  $R$  y  $S$ . Sea  $f$  un campo escalar definido y acotado sobre  $S$ , la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  se define como

$$\iint_S f \, dS = \iint_R f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA,$$

siempre que exista la integral doble del lado derecho.

**Observación 6.35** En relación con la definición 6.15 anterior, se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. Si el campo escalar  $f$  es igual a uno, es decir,  $f = 1$ , entonces:

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA,$$

que es precisamente la integral doble que determina el área de la superficie  $S$ . Así se puede definir el área de la superficie  $S$  como

$$A_S = \iint_S 1 \, dS.$$

2. Si  $S$  se puede expresar explícitamente, en particular  $z = z(x, y)$ , entonces una parametrización para  $S$  es  $r(x, y) = (x, y, z(x, y))$  con  $(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ , donde es claro que  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-z_x, -z_y, 1)$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar definido y acotado en  $S$ , así

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(x, y)) \|(-z_x, -z_y, 1)\| \, dA \\ &= \iint_R f(x, y, z(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA. \end{aligned}$$

3. Suponga que la superficie  $S$  se halla sobre alguno de los planos coordenados, entonces la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  se reduce a la integral doble de  $f$  sobre la proyección de  $S$ . Por ejemplo, en particular, si  $S$  se halla sobre el plano  $xy$ , es decir, cuando  $z = 0$  o bien  $z(x, y) = 0$ , entonces una parametrización para  $S$  es

$$r(x, y) = (x, y, 0),$$

donde  $(x, y) \in R$ , así se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R f(x, y, 0) \sqrt{1} \, dA \\ &= \iint_R f(x, y, 0) \, dA. \end{aligned}$$

4. En ocasiones la superficie  $S$  puede ser regular a trozos, es decir,  $S$  puede ser la unión de varias superficies regulares.

**Ejemplo 6.81** Evalúe  $\iint_S x^2 z \, dS$ , suponiendo que  $S$  es la parte del cono circular  $z^2 = x^2 + y^2$  que se encuentra entre los planos  $z = 2$  y  $z = 4$ .

**Solución:** Para este ejemplo se está integrando sobre la superficie  $S$  mostrada en la figura 6.49.

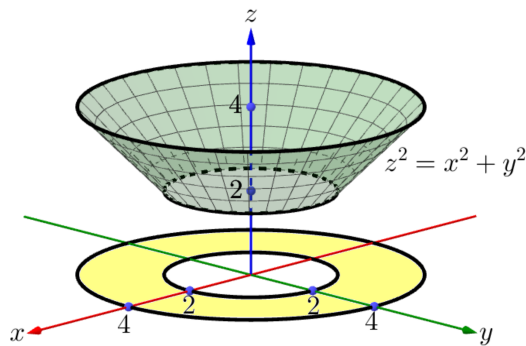


Figura 6.49: Superficie cónica  $S$  limitada por  $z^2 = x^2 + y^2$  y los planos  $z = 2$  y  $z = 4$

## 6.8. Integral de superficie

En este caso, como  $z$  es positivo, al despejarlo de la ecuación del cono se tiene que  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , así una parametrización para  $S$  es

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$ , es decir, la proyección sobre el plano  $xy$  es un anillo circular.

Según el punto 2 de la observación 6.35 y tomando  $f(x, y, z) = x^2z$ , se tiene que

$$\iint_S f \, dS = \iint_R f(x, y, z(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA.$$

A partir de lo anterior note que

- $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , entonces  $z_x^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ .
- $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , entonces  $z_y^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ .
- $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$ .

Así se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z \, dS &= \iint_R x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_R x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_2^4 r^4 \cos^2 \theta \, dr d\theta \\ &= \frac{992\pi\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.82** Calcule  $\iint_S \frac{xz}{y} \, dS$  donde  $S$  es la parte del cilindro  $x - y^2 = 0$  que se encuentra en el primer octante, entre los planos  $z = 0$ ,  $z = 4$ ,  $y = 1$  y  $y = 2$ .

**Solución:** Un dibujo de la superficie  $S$  se muestra en la figura 6.50.

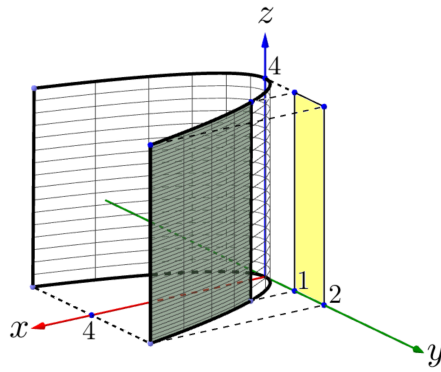


Figura 6.50: Superficie  $S$  en el primer octante, limitada por  $x = y^2$  entre los planos  $z = 0$ ,  $z = 4$ ,  $y = 1$  y  $y = 2$

Además, la proyección de dicha superficie se va considerar sobre el plano  $yz$ . Tomando  $x = y^2$ , la superficie  $S$  se puede parametrizar como

$$r(y, z) = (y^2, y, z)$$

donde  $(y, z) \in R = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4\}$ . Sea  $f(x, y, z) = \frac{xz}{y}$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(y, z)) \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \frac{y^2 z}{y} \sqrt{4y^2 + 1} \, dA \\ &= \int_1^2 \int_0^4 yz \sqrt{4y^2 + 1} \, dz dy \\ &= \frac{2}{3}(17^{3/2} - 5^{3/2}). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.83** Calcular  $\iint_S \frac{1}{a^2 + z^2} \, dS$  donde  $S$  es la porción del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  limitado por los planos  $z = 0$  y  $z = h$ ,  $h > 0$ .

**Solución:** La parametrización de la superficie cilíndrica  $S$  está dada por

$$r(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z),$$

donde  $(\theta, z) \in R = [0, 2\pi] \times [0, h]$ . Luego, observe que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \|(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)\| = a.$$

6.8. Integral de superficie

Defina  $f(x, y, z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(\theta, z)) \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| dA \\ &= \iint_R \frac{a}{a^2 + z^2} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{a}{a^2 + z^2} dz d\theta \\ &= 2\pi \arctan\left(\frac{h}{a}\right). \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.84** Calcular  $\iint_S \ln(z) \, dS$  donde  $S$  es el casquete de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ .

**Solución:** Un dibujo de la superficie  $S$  se muestra en la figura 6.51.

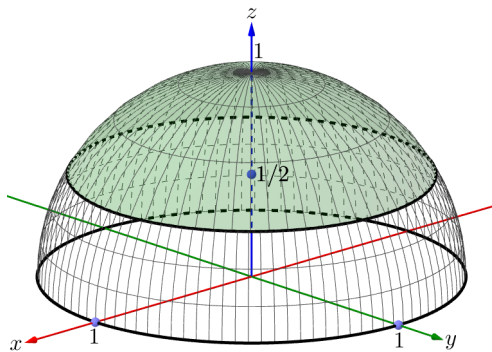


Figura 6.51: Casquete de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  entre los planos  $z = \frac{1}{2}$  y  $z = 1$

Usando coordenadas esféricas, una parametrización de  $S$  es

$$r(\phi, \theta) = (\text{sen } \phi \cos \theta, \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \cos \phi),$$

donde es claro que  $(\phi, \theta) \in R = [0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 2\pi]$ <sup>9</sup>. Luego, note que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & 0 \end{array} \right\| \\ &= (\sin^2 \phi \cos^2 \theta, \sin^2 \phi \sin^2 \theta, \cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= \sqrt{\sin^4 \phi \cos^2 \theta + \sin^4 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \phi} \\ &= \sqrt{\sin^4 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \phi} \\ &= \sqrt{\sin^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} \\ &= \sin \phi. \end{aligned}$$

Con ello defina  $f(x, y, z) = \ln(z)$ , entonces la integral de superficie solicitada es

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(\phi, \theta)) \left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| \, dA \\ &= \iint_R \ln(\cos \phi) \sin \phi \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \ln(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \pi(\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Para calcular la integral doble anterior recuerde que  $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 6.85** Calcular  $\iint_S 1 \, dS$  donde  $S$  es la porción del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z \geq 0$ , limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ .

**Solución:** Por la parte 1 de la observación 6.35, realmente se está preguntando por el área de la superficie  $S$ . Luego, como dicha superficie es parte del cono, donde  $z \geq 0$ , entonces se tiene que  $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para parametrizar  $S$  se necesita identificar su proyección  $R$  sobre el plano  $xy$ , la cual queda definida por la curva de intersección entre el cono y la esfera, siendo esta la circunferencia

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Con esta información, la parametrización de  $S$  está dada por la fórmula

$$r(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

<sup>9</sup>Para el movimiento del ángulo  $\phi$ , note que si  $z = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$ .



6.8. Integral de superficie

donde  $(x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S 1 \, dS &= \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA \\ &= \sqrt{2} \iint_R dA \\ &= \sqrt{2} A_R \\ &= \frac{\sqrt{2} a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.86** Calcular  $\iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$  con  $S$  la parte del plano  $6x + 4y + 3z = 12$  situada en el primer octante.

**Solución:** Un dibujo de la superficie  $S$  formada por el plano  $6x + 4y + 3z = 12$  en el primer octante, más su proyección en el plano  $xy$ , se muestra en la figura 6.52.

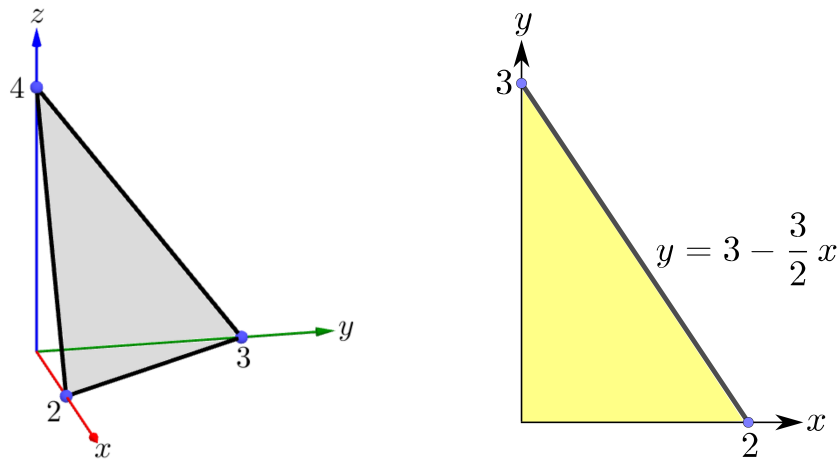


Figura 6.52: Superficie  $S$  formada por plano  $6x + 4y + 3z = 12$  en el primer octante y su proyección en el plano  $xy$

Luego, al despejar  $z$  del plano  $6x + 4y + 3z = 12$  se tiene que  $z(x, y) = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ . Con ello, una parametrización para la la superficie  $S$  es

$$r(x, y) = \left( x, y, 4 - 2x - \frac{4}{3}y \right),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x\}$ . Defina  $f(x, y, z) = z + 2x + \frac{4y}{3}$ , entonces la integral de superficie está dada por

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_R f(r(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \iint_R \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y\right) \frac{\sqrt{61}}{3} \, dA \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_R 1 \, dA \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} A_R \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \\ &= 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.87** Calcular  $\iint_S z \, dS$  donde  $S$  es la superficie del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano  $2x + 4y + z = 8$ .

**Solución:** La diferencia con el ejemplo pasado es que el tetraedro está compuesto por 4 caras, como lo muestra la figura 6.53.

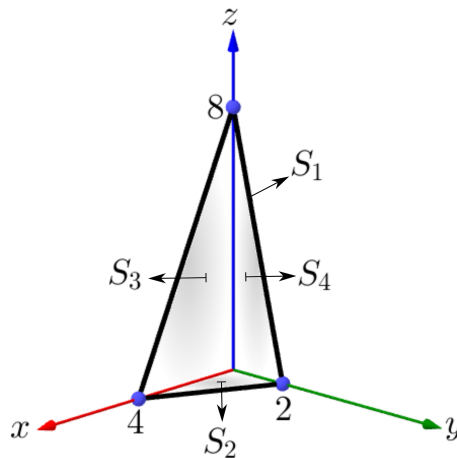


Figura 6.53: Superficie  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

Defina  $f(x, y, z) = z$ , en base con lo anterior se tiene que

$$\iint_S f \, dS = \iint_{S_1} f \, dS + \iint_{S_2} f \, dS + \iint_{S_3} f \, dS + \iint_{S_4} f \, dS.$$

A continuación se va a calcular cada una de las integrales de superficie anteriores.

## 6.8. Integral de superficie

1. Para  $\iint_{S_1} f \, dS$ , note que la parametrización de la superficie  $S_1$  es

$$r(x, y) = (x, y, 8 - 4y - 2x)$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{x}{2}\}$ . Entonces se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} f \, dS &= \iint_R f(r(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \\ &= \sqrt{21} \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} (8 - 4y - 2x) \, dy \, dx \\ &= 32\sqrt{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

2. Para  $\iint_{S_2} f \, dS$ , por la parte 3 de la observación 6.35, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} f \, dS &= \iint_R f(x, y, 0) \, dA \\ &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} 0 \, dy \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Para  $\iint_{S_3} f \, dS$ , por la parte 3 de la observación 6.35, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} f \, dS &= \iint_R f(0, y, z) \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{8-4y} z \, dz \, dy \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

4. Para  $\iint_{S_4} f \, dS$ , por la parte 3 de la observación 6.35, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} f \, dS &= \iint_R f(x, 0, z) \, dA \\ &= \int_0^4 \int_0^{8-2x} z \, dz \, dx \\ &= \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que

$$\iint_S f \, dS = 32\sqrt{\frac{7}{3}} + 0 + \frac{64}{3} + \frac{128}{3} = 32\sqrt{\frac{7}{3}} + 64.$$

**Ejemplo 6.88** Sea  $a > 0$  y  $b > a$ . Halle  $\iint_S 1 \, dS$  donde  $S$  es el toro dado por

$$\begin{cases} x = (b + a \cos u) \cos v \\ y = (b + a \cos u) \sin v \\ z = a \sin v \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

**Solución:** Por la parte 1 de la observación 6.35 realmente se está preguntando por el área del toro, el cual ya se resolvió en el ejemplo 6.77. Así se tiene que

$$\iint_S 1 \, dS = 4ab\pi^2.$$

## 6.8.2. Integral de superficie sobre un campo vectorial (Integral de flujo)

Antes de definir la integral de superficie sobre un campo vectorial, se debe tener presente los siguientes puntos.

1. Sea  $R$  una región abierta y medible y sea  $S$  una superficie regular parametrizada por la función  $r(u, v)$  con primeras derivadas parciales continuas, donde  $(u, v) \in R$ , los **vectores normales unitarios** a  $S$  en  $(u, v)$ , denotados por  $\vec{n}(u, v)$ , se definen como

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}.$$

Por comodidad de notación, se suele expresar  $\vec{n}(u, v)$  solo como  $\vec{n}$ .

2. Si  $S$  se puede expresar explícitamente, en particular  $z = z(x, y)$ , siendo una parametrización para  $S$  la ecuación  $r(x, y) = (x, y, z(x, y))$  con  $(x, y) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces los vectores normales unitarios a  $S$  son

$$\vec{n}(x, y) = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}.$$

**Definición 6.16 (Integral de superficie sobre un campo vectorial)** Sea  $R$  una región abierta y medible y sea  $S$  una superficie regular parametrizada por la función  $r(u, v)$  con primeras derivadas parciales continuas, donde  $(u, v) \in R$ ,  $r$  es una biyección entre  $R$  y  $S$ , de modo que

## 6.8. Integral de superficie

proporciona una orientación que coincide con un campo continuo de vectores  $\vec{n}(u, v)$ . Sea  $F$  un campo vectorial definido y acotado sobre  $S$ , se define la integral de superficie de  $F$  sobre  $S$  como

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R F(r(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA,$$

siempre que exista la integral doble del lado derecho.

**Observación 6.36** En cuanto a la definición 6.16 se debe considerar lo siguiente:

1. Si se utiliza la definición de vector normal unitario a la superficie  $S$ , entonces la integral de superficie sobre un campo vectorial se puede representar de forma más simple, en efecto:

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R F(r(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA \\ &= \iint_R F(r(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dA \\ &= \iint_R F(r(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dA \end{aligned}$$

Entonces,

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R F(r(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dA.$$

2. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial, suponga que  $F(x, y, z)$  representa la densidad de flujo de una corriente de fluido, entonces la masa total de fluido que pasa a través de  $S$  por unidad de tiempo en la dirección de  $\vec{n}$  es la integral de superficie

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS.$$

Por ello la integral de superficie sobre un campo vectorial es llamada también **integral de flujo**.

3. Es claro que si  $S$  se puede expresar explícitamente, se tienen los tres casos dados a continuación:

- $S : r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ , donde  $(x, y) \in R_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} F(r(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA.$$

- $S : r(x, z) = (x, y(x, z), z)$ , donde  $(x, z) \in R_{xz} \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xz}} F(r(x, z)) \cdot (-y_x, 1, -y_z) \, dA.$$

- $S : r(y, z) = (x(y, z), y, z)$ , donde  $(y, z) \in R_{yz} \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{yz}} F(r(y, z)) \cdot (1, -x_y, -x_z) \, dA.$$

4. La integral de flujo  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$  también se acostumbra a escribir como  $\iint_S F \cdot dS$ , por tanto, cualquiera de estas dos notaciones se pueden utilizar a lo largo del texto.
5. En ocasiones la superficie  $S$  puede ser regular a trozos, es decir,  $S$  puede ser la unión de varias superficies regulares.

**Ejemplo 6.89** Calcular  $\iint_S F \cdot dS$  si  $F(x, y, z) = (0, 0, 1 + z)$  y  $S$  es la porción del plano  $z = a + y$ ,  $a > 1$ , acotado por  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solución:** Tome  $z(x, y) = a + y$ , la superficie  $S$  se puede parametrizar como

$$r(x, y) = (x, y, a + y)$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Con ello, y usando coordenadas polares, se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iint_R F(r(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (0, 0, 1 + a + y) \cdot \underbrace{(0, -1, 1)}_{\text{Vector normal del plano}} \, dA \\ &= \iint_R (1 + a + y) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + a + r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{2} (1 + a) + \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right) \Big|_{r=0}^{r=1} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + a}{2} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{3} \right) \, d\theta \\ &= \left( \frac{(1 + a)\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{3} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= (1 + a)\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.90** Un flujo de fluido está descrito por el campo vectorial  $F(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$  y sea  $S$  la superficie definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con  $z \geq 0$  y sea  $\vec{n}$  el vector normal unitario a  $S$  orientado hacia el exterior de la esfera. Calcule la masa de fluido que atraviesa  $S$  por unidad de tiempo en la dirección del vector normal  $\vec{n}$ .

**Solución:** Realmente por lo que se está preguntando es por el valor de la integral de flujo

$\iint_S F \cdot dS$ , donde  $S$  corresponde a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , la cual, usando coordenadas esféricas, se parametriza como

$$r(\phi, \theta) = (\text{sen } \phi \cos \theta, \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \cos \phi),$$

donde  $(\phi, \theta) \in R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ . Luego, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \text{sen } \theta & -\text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi \text{sen } \theta & \text{sen } \phi \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\text{sen}^2 \phi \cos \theta, \text{sen}^2 \phi \text{sen } \theta, \cos \phi \text{sen } \phi). \end{aligned}$$

Con todo lo anterior se infiere que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R F(r(\phi, \theta)) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \, dA \\ &= \iint_R (\text{sen } \phi \cos \theta, -2 \text{sen } \phi \cos \theta - \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \cos \phi) \cdot \\ &\quad (\text{sen}^2 \phi \cos \theta, \text{sen}^2 \phi \text{sen } \theta, \cos \phi \text{sen } \phi) \, dA \\ &= \iint_R (\text{sen}^3 \phi \cos^2 \theta - 2 \text{sen}^3 \phi \cos \theta \text{sen } \theta - \text{sen}^3 \phi \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \phi \text{sen } \phi) \, dA \\ &= \iint_R [\text{sen}^3 \phi (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \text{sen } \theta - \text{sen}^2 \theta) + \cos^2 \phi \text{sen } \phi] \, dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [\text{sen}^3 \phi (\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta)) + \cos^2 \phi \text{sen } \phi] \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}^3 \phi (\text{sen}(2\theta) + \cos(2\theta)) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos^2 \phi \text{sen } \phi \right] \, d\phi \\ &= \left[ -\frac{2\pi}{3} \cos \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.91** Determine el valor de la integral de flujo  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS$ , para la superficie que tiene como frontera la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$$

y donde el campo vectorial es  $F(x, y, z) = (z^3, x^3, -y^3)$ .

**Solución:** Observe que la superficie  $S$  está contenida en el plano  $z = x$ , limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = x \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ . Con ello y tomando  $z(x, y) = x$ , una parametrización para  $S$  es

$$r(x, y) = (x, y, x)$$

donde  $(x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$ . Luego, note que se debe calcular  $\nabla \times F$ , que realmente equivale al  $rot F$ . Definiendo  $f_1(x, y, z) = z^3$ ,  $f_2(x, y, z) = x^3$  y  $f_3(x, y, z) = -y^3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} rot F &= \nabla \times F \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (-3y^2, 3z^2, 3x^2). \end{aligned}$$

Según toda la información anterior, y usando coordenadas polares, se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dA &= \iint_R (\nabla \times F)(r(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dS \\ &= \iint_R (-3y^2, 3z^2, 3x^2) \cdot (-1, 0, 1) dA \\ &= \iint_R (3x^2 + 3y^2) dA \\ &= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^3 dr d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta. \end{aligned}$$



## 6.8. Integral de superficie

Para resolver la integral anterior recuerde que

$$\begin{aligned}\cos^4 \theta &= (\cos^2 \theta)^2 \\ &= \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)) \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)).\end{aligned}$$

Posteriormente,

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} \, dS &= \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= \frac{3}{32} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{3}{32} \left( 3\theta + 2\sin(2\theta) + \frac{1}{4}\sin(4\theta) \right) \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9\pi}{32}.\end{aligned}$$

## Ejercicios

**Ejercicio 305** Halle el área de la porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que se encuentra dentro del cilindro  $x^2 - ax + y^2 = 0$ . **Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 6.71.

**Ejercicio 306** Calcule el área de la porción del plano  $2x + 3y + 4z = 28$ , cuya proyección en el plano  $xy$  es una región  $R$  simple y acotada tal que  $A_R = 10$ .

**Ejercicio 307** Sea  $R$  una región del plano que no contiene al origen tal que  $A_R = 4$ . Determine el área de la superficie  $S$  dada por  $z = 1 + 3\sqrt{x^2 + y^2}$ , donde  $(x, y) \in R$ .

**Ejercicio 308** Determine el área **total** del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  entre los planos  $z = 1$  y  $z = 4$ . **Sugerencia:** el área total se refiere tanto el área de la porción del paraboloides como el área de las tapas.

**Ejercicio 309** Determine el área de superficie de la porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$ , que queda dentro del paraboloides  $2z = x^2 + y^2$ . **Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 6.80.

**Ejercicio 310** Encuentre el área de superficie de la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$  que permanece dentro del paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .

**Ejercicio 311** Muestre que el área del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  de altura  $h$  es  $2h\pi a$ . **Sugerencia:** use la parametrización  $r(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$  donde  $(\theta, z) \in R = [0, 2\pi] \times [0, h]$ .

**Ejercicio 312** Halle el área de la superficie  $S$  dada por la porción del cono  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ , que se encuentra dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ .

**Ejercicio 313** Determine el área de la superficie  $S$  limitada por  $x^2 - y^2 = z^2$ ,  $y + z = a$ , en el primer octante.

**Ejercicio 314** Halle el área de la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , acotada por el cilindro generalizado  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , con  $a > b$ .

**Ejercicio 315** Escriba la integral de superficie que permite calcular el área de la superficie  $S$  de  $y^2 + z^2 = 2ax$ , comprendida entre  $y^2 = ax$ ,  $x=a$ .

**Ejercicio 316** Determine el área de la superficie  $S$  que corresponde al cilindro  $x^2 + y^2 = 2ax$ , limitado por el plano  $z = 0$  y el cono  $z^2 = x^2 + y^2$ .

**Ejercicio 317** Halle el área de la porción del paraboloides rotado  $z = xy$ , el cual se proyecta sobre el plano  $z = 0$  dentro del disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Ejercicio 318** Calcule la integral de superficie  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , donde  $S$  es la superficie  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $0 \leq z \leq 1$  y  $f(x, y, z) = x^2y^2z$

**Ejercicio 319** Determine el valor de la integral de superficie  $\iint_S xye^{xz} dS$ , donde  $S$  es la cuarta parte del cilindro definido por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ .

**Ejercicio 320** Sea  $S$  el casquete de esfera dado por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ . Considere el campo escalar  $f(x, y, z) = \ln z$ , muestre que  $\iint_S f(x, y, z) dS = \pi(\ln 2 - 1)$ .

## 6.8. Integral de superficie

**Ejercicio 321** Encuentre el flujo de  $F(x, y, z) = (yz, x, -z^2)$  a través de la superficie  $y = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq z \leq 4$  y en la dirección del vector  $\vec{n}$  con segunda componente positiva.

**Ejercicio 322** Determine el flujo del campo  $F(x, y, z) = (0, yz, z^2)$  a través de la superficie cilíndrica  $y^2 + z^2 = 1$  con  $z \geq 0$ , entre los planos  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Ejercicio 323** Sea  $S$  la porción de plano limitado por el triángulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ , y sea  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Calcule la integral de superficie  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$ , donde  $\vec{n}$  es la normal unitaria a  $S$  que tiene componente  $z$  no negativa. Para ello utilice:

1. La representación vectorial paramétrica  $r(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u)$ .
2. Una representación explícita de la forma  $z = z(x, y)$ .

**Ejercicio 324** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ . Calcule la integral de flujo  $\iint_S F \cdot dS$  donde  $S$  limita el sólido formado por  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  y  $z = 0$ .

**Sugerencia:** note que  $S$  se compone de dos superficies: una que corresponde a la esfera y otra al plano.

**Ejercicio 325** Calcule  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS$ , donde  $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$  y  $S$  es la superficie del paraboloides  $2z = x^2 + y^2$  limitado por  $z = 2$ .

**Ejercicio 326** Sea  $S$  una superficie paramétrica dada en la forma explícita  $z = z(x, y)$ , donde  $(x, y)$  varía en una región plana  $R$ , que es la proyección de  $S$  en el plano  $z = 0$ . Sea el campo vectorial  $F = (f_1, f_2, f_3)$  y sea  $\vec{n}$  la normal unitaria a  $S$  con tercera componente positiva. Emplear la representación paramétrica  $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para demostrar que

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R \frac{f_1 \cdot F_x + f_2 \cdot F_y + f_3 \cdot F_z}{F_z} \, dA,$$

donde  $f_1, f_2$  y  $f_3$  están evaluados en  $(x, y, f(x, y))$ . **Sugerencia:** debe usar el Teorema de la Derivada Implícita (teorema 3.13) y recuerde que  $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$ .

## 6.9. Teorema de la Divergencia

Antes de enunciar el Teorema de la Divergencia, primero se debe tener presente algunos aspectos de relevancia. En primer lugar, si  $S$  es una superficie con ecuación vectorial paramétrica  $r(u, v)$ , entonces los vectores normales unitarios a  $S$  en  $(u, v)$  pueden escogerse entre dos vectores unitarios opuestos:

$$\vec{n}(u, v) = \pm \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}.$$

El signo “+” en la fórmula anterior corresponde a un lado (o cara) de la superficie  $S$  y el signo “-” corresponde al otro lado de la superficie  $S$ . Por tanto, orientar la superficie  $S$  significa escoger un signo para  $\vec{n}$ , como lo muestra la siguiente figura. En relación con lo anterior, y de

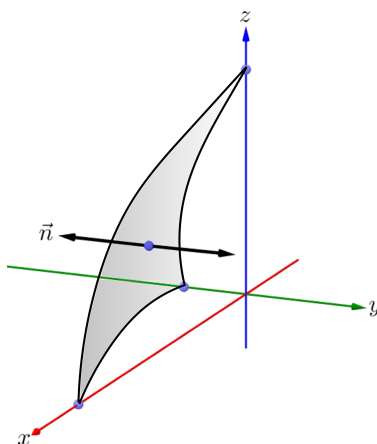


Figura 6.54: Orientación del vector  $\vec{n}$

manera informal, una superficie  $S$  se dirá orientable si es posible decidir sin ambigüedad cual es cada uno de los lados de la superficie. Por ejemplo, si en particular se considera una superficie semiesférica, el vector  $\vec{n}$  con signo positivo apunta hacia el exterior, y con signo negativo apunta al interior, sin embargo, esto no es una ley para todas las superficies. En cambio, una superficie no orientable es la banda de Möbius ya que no hay diferencia entre el lado “exterior” y el “interior” de la superficie, como lo muestra la figura 6.55.

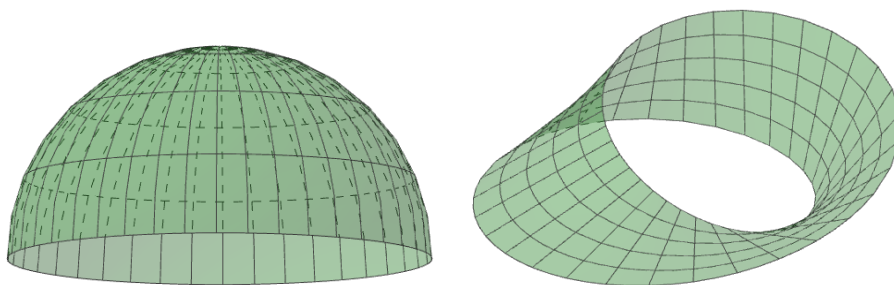


Figura 6.55: La semiesfera y la banda de Möbius

**Definición 6.17 (Superficie orientable)** Si en cada punto  $(u, v)$  de una superficie regular  $S$  parametrizada por  $r(u, v)$ , es posible asociarle un vector  $\vec{n}(u, v)$ , de modo que como función,  $\vec{n}$  sea continua sobre toda la superficie  $S$ , entonces se dice que  $S$  es orientable.

**Observación 6.37** Recuerde que lo anterior es equivalente a decir que la superficie  $S$  posee dos caras, por ejemplo, un plano, la esfera, el cilindro, entre otros. Además, en las integrales de flujo, siempre se ha usado el vector normal unitario fundamental, sin embargo, no siempre es este el vector que se elige para el cálculo, ya que algunos teoremas (como el teorema de la Divergencia, que se enunciará a continuación) requieren superficies con vectores unitarios hacia el exterior.

**Teorema 6.8 (Teorema de la Divergencia)** Sea  $Q$  un sólido limitado por una superficie orientable  $S$ , sea  $\vec{n}$  la **normal unitaria exterior** a  $S$  y sea  $F$  un campo vectorial con derivadas parciales continuas de primer orden sobre  $Q$ , entonces

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV.$$

**Observación 6.38** En relación con el teorema 6.8 anterior, se tiene los siguientes puntos:

1. Recuerde que  $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$ . Entonces, si  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , se tendría que  $\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ . Así, la fórmula de dicho teorema se puede escribir como

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_Q \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV.$$

2. El Teorema de la Divergencia es conocido también como el Teorema de la Divergencia de Gauss o simplemente Teorema de Gauss.

**Ejemplo 6.92** Sea  $S$  la superficie del sólido  $Q$  limitado por los planos  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 5$  y el cilindro  $z = 1 - x^2$ . Aplique el Teorema de la Divergencia de Gauss para calcular  $\iint_S F \cdot dS$ , suponiendo que

$$F(x, y, z) = (x + \cos y, y + \operatorname{sen} z, z + e^x)$$

**Solución:** El dibujo del sólido  $Q$  se muestra en la figura 6.56 Observe que  $\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$ ,

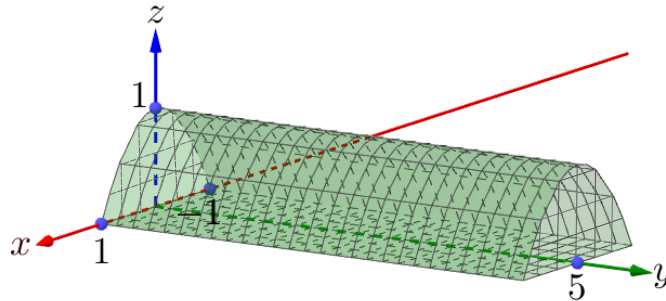


Figura 6.56: Sólido  $Q$ , limitado por cuatro superficies

por tanto, usando el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^5 \int_0^{1-x^2} 3 \, dz \, dy \, dx \\ &= 20. \end{aligned}$$

Observe que de no usar el Teorema de la Divergencia, se tendría que calcular cuatro integrales de superficie.

**Ejemplo 6.93** Sea  $Q$  el sólido acotado por el cilindro  $z = 4 - x^2$ , el plano  $y + z = 5$ , los planos  $y = 0$  y  $z = 0$ . Use el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de flujo  $\iint_S F \cdot dS$ , donde  $F(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z, x^2 y + \cos z, e^{x^2+y^2})$ .

**Solución:** De acuerdo con el Teorema de la Divergencia se tiene que  $\operatorname{div} F = 3x^2 + x^2 = 4x^2$ .

Posteriormente, haciendo un dibujo del sólido  $Q$  se llega a concluir que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{5-z} 4x^2 \, dy \, dz \, dx \\ &= \frac{512}{13}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.94** Calcule  $\iint_S F \cdot dS$ , donde  $F(x, y, z) = (0, 0, z + 1)$  y  $S$  es la frontera del sólido  $Q$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y los planos  $z = 2 + y$  y  $z = 0$ .

**Solución:** Un dibujo del sólido  $Q$  se aprecia en la figura 6.57

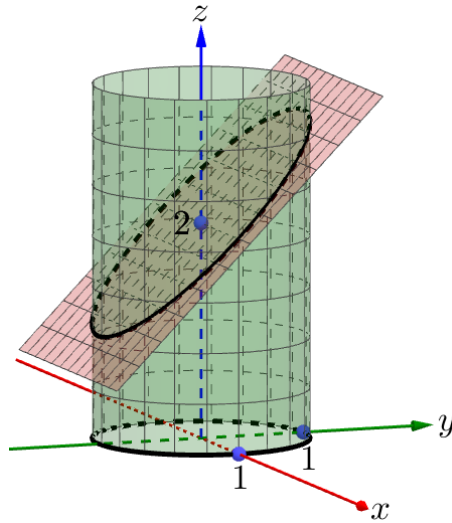


Figura 6.57: Sólido  $Q$ , limitado por tres superficies

Note que  $\operatorname{div} F = 0 + 0 + 1 = 1$ , por tanto, utilizando el Teorema de la Divergencia y coordenadas cilíndricas se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2+r \operatorname{sen} \theta} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.95** Calcule  $\iint_S F \cdot dS$  donde  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $S$  es la frontera del sólido  $Q$  comprendido entre las superficies  $z = 10 - x^2 - y^2$  y  $z = 2 + x^2 + y^2$ .

**Solución:** El sólido  $Q$  es cerrado y está limitado por el paraboloides  $z = 10 - x^2 - y^2$ , el cual es cóncavo hacia abajo con vértice en el punto  $(0, 0, 10)$ , y por el paraboloides  $z = 2 + x^2 + y^2$ , el cual es cóncavo hacia arriba con vértice en el punto  $(0, 0, 2)$ . Es claro que la curva de intersección de estos paraboloides es el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , siendo esta la proyección del sólido  $Q$  sobre el plano  $xy$ . Luego, si se usa el Teorema de la Divergencia y coordenadas cilíndricas se tiene que  $\operatorname{div} F = 3$ ,

con ello

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2+r^2}^{10-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 48\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.96** Use el Teorema de la Divergencia para calcular  $\iint_S (x^2 + y + z) \, dS$ , donde  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** El Teorema de la Divergencia establece que

$$\iint_S (x^2 + y + z) \, dS = \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV,$$

por tanto se debe encontrar un campo vectorial  $F = (f_1, f_2, f_3)$  sobre  $S$  de tal forma que  $F \cdot \vec{n} = x^2 + y + z$ . Para ello, recuerde que el vector gradiente de una superficie en un punto  $P$  es normal (ortogonal) al plano tangente a dicha superficie en  $P$ .

Entonces, dado un punto  $P(x, y, z)$  sobre  $S$  se tiene que el vector unitario normal  $\vec{n}$  a  $S$  en  $P(x, y, z)$  está dado por

$$\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\|(2x, 2y, 2z)\|} = \frac{2(x, y, z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z),$$

puesto que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Con ello se deduce que

$$\begin{aligned} F \cdot \vec{n} &= x^2 + y + z \\ \Rightarrow (f_1, f_2, f_3) \cdot (x, y, z) &= x^2 + y + z \\ \Rightarrow x f_1 + y f_2 + z f_3 &= x^2 + y + z, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $f_1 = x$ ,  $f_2 = 1$  y  $f_3 = 1$ , por lo cual  $F(x, y, z) = (x, 1, 1)$ . Ahora, note que  $\operatorname{div} F = 1$ , entonces, aplicando el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y + z) \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iiint_Q 1 \, dV \\ &= V_Q \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (1)^3 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



**Ejemplo 6.97** Aplique el teorema de la Divergencia al campo  $F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$  para calcular, mediante una integral de superficie, el volumen del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Solución:** Note que  $\operatorname{div} F = 1$ . Ahora considere la superficie  $S$  como la frontera del sólido  $Q$  generado por el elipsoide dado y  $\vec{n}$  un vector unitario exterior a  $S$ . Por el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q 1 \, dV = V_Q,$$

con ello se debe calcular  $V_Q = \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$ , para lo cual solo considere la mitad superior del elipsoide, es decir, cuando  $z \geq 0$  (al final, la integral de superficie anterior se multiplica por dos). De esta manera, despejando  $z(x, y) = \sqrt{c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{b^2}}$  del elipsoide, la superficie se parametriza como

$$r(x, y) = \left( x, y, \sqrt{c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{b^2}} \right),$$

donde  $(x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ . Note además que

$$z_x = \frac{-xc^2}{a^2 \sqrt{c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{b^2}}} = \frac{-c^2}{a^2 z(x, y)}$$

y que

$$z_y = \frac{-yc^2}{b^2 \sqrt{c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{b^2}}} = \frac{-c^2}{b^2 z(x, y)}.$$

Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R F(r(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R F(x, y, z(x, y)) \cdot \left( \frac{c^2}{a^2 z(x, y)}, \frac{c^2}{b^2 z(x, y)}, 1 \right) \, dA \\ &= \frac{1}{3} \iint_R \left( \frac{c^2x}{a^2 z(x, y)} + \frac{c^2y}{b^2 z(x, y)} + z(x, y) \right) \, dA \\ &= \frac{1}{3} \iint_R \left( \frac{b^2c^2x + a^2c^2y + a^2b^2(z(x, y))^2}{a^2b^2 z(x, y)} \right) \, dA \\ &= \frac{1}{3} \iint_R \left( \frac{b^2c^2x + a^2c^2y + a^2b^2c^2 - b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2}{a^2b^2 z(x, y)} \right) \, dA \\ &= \frac{c}{3} \iint_R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \, dA. \end{aligned}$$

Para resolver la última integral doble use el cambio de variables  $x = ar \cos \theta$  y  $y = br \sin \theta$ , entonces se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \frac{c}{3} \iint_R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \, dA \\ &= \frac{c}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{abr}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

Este último resultado se multiplica por dos, obteniendo que  $V_Q = \frac{4\pi abc}{3}$ .

**Ejemplo 6.98** Calcule el flujo del campo vectorial  $F(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$  a través de la superficie  $S$  cerrada que limita el cilindro  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , con  $0 \leq z \leq h$ .

1. Sin usar el Teorema de la Divergencia.
2. Usando el Teorema de la Divergencia.

**Solución:**

1. La superficie cerrada  $S$  es la unión de tres superficies, como lo muestra la figura 6.58.

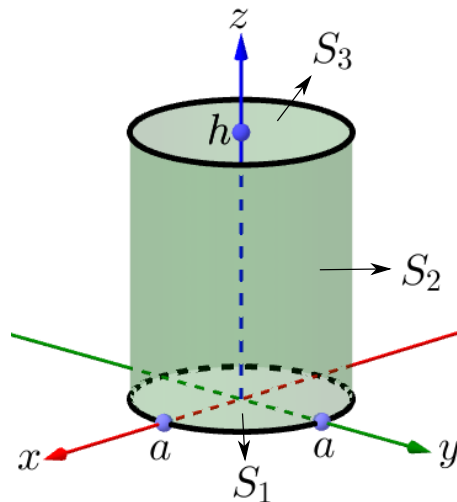


Figura 6.58: Superficie  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

6.9. Teorema de la Divergencia

Con ello, el flujo solicitado corresponde a la integral

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS.$$

Para  $\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS$ , note que la superficie  $S_1$  se parametriza como

$$r_1(x, y) = (x, y, 0),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ . Además, recuerde que el vector  $\vec{n}_1$  debe apuntar hacia afuera de la superficie  $S$ , con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_R F(r_1(x, y)) \cdot -(0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R (0, -y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para  $\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS$ , observe que  $S_2$  es el borde del cilindro, el cual se parametriza como

$$r_2(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z),$$

donde  $(\theta, z) \in R = [0, 2\pi] \times [0, h]$ . Luego,

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0),$$

con ello se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS &= \iint_R F(r_2(\theta, z)) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right) \, dA \\ &= \iint_R (za \cos \theta, -a^2 \sin^2 \theta, za \cos \theta) \cdot (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h (za^2 \cos^2 \theta - a^3 \sin^3 \theta) \, dz d\theta \\ &= \frac{a^2 h^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, para  $\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS$ , note que la superficie  $S_3$  se parametriza como

$$r_3(x, y) = (x, y, h),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ . Note que el vector  $\vec{n}_3$  debe apuntar hacia afuera de  $S$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS &= \iint_R F(r_3(x, y)) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R (hx, -y^2, hx) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R hx \, dA \\ &= h \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 \cos \theta) \, dr d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS = 0 + \frac{a^2 h^2 \pi}{2} + 0 = \frac{a^2 h^2 \pi}{2}.$$

2. Si se usa el Teorema de la Divergencia, se tiene que  $\operatorname{div} F = z - 2y + x$ , así, y usando coordenadas cilíndricas, se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iiint_Q (z - 2y + x) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h (z - 2r \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{cos} \theta) r \, dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{h^2 r}{2} - 2hr^2 \operatorname{sen} \theta + hr^2 \operatorname{cos} \theta \right) \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{h^2 a^2}{4} - \frac{2ha^3}{3} \operatorname{sen} \theta + \frac{ha^3}{3} \operatorname{cos} \theta \right) \, dr d\theta \\ &= \frac{a^2 h^2 \pi}{2}, \end{aligned}$$

resultado que coincide con la parte anterior de este ejercicio.

**Ejemplo 6.99** Sea  $S$  la superficie cerrada que limita el sólido

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}.$$

Verifique el Teorema de la Divergencia para el campo vectorial  $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$ .

**Solución:** Observe que la superficie cerrada  $S$  limita el sólido  $Q$ , que corresponde al paraboloides  $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ , el cual es cóncavo hacia abajo con vértice en el punto  $(0, 0, 4)$ , acotado por el plano  $z = 0$ . Con ello la superficie  $S = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1$  es la tapa del paraboloides en el plano  $z = 0$  y  $S_2$  es el borde del paraboloides dado. Ahora, para verificar el Teorema de la Divergencia se deben calcular la integral de superficie  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$  y la integral triple  $\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV$ , ambas por aparte, las cuales deben generar el mismo resultado.

- Para calcular  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$ , observe que

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

Luego, como  $S_1$  está sobre el plano  $z = 0$ , su parametrización es

$$r_1(x, y) = (x, y, 0),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Considerando que  $\vec{n}_1$  debe apuntar hacia afuera de  $S$ , se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_R F(r_1(x, y)) \cdot -(0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma similar, como  $S_2$  corresponde al borde del paraboloides  $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ , una parametrización para esta superficie es

$$r_2(x, y) = (x, y, 4 - 2x^2 - 2y^2),$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ . Con ello se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS &= \iint_R F(r_2(x, y)) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R (x, y, 8 - 4x^2 - 4y^2) \cdot (4x, 4y, 1) \, dA \\ &= \iint_R 8 \, dA \\ &= 8A_R \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = 0 + 16\pi = 16\pi.$$

- Para determinar el valor de  $\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV$  se usan coordenadas cilíndricas, donde  $\operatorname{div} F = 4$ , entonces queda

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV &= 4 \iiint_Q dV \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{4-2r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 16\pi, \end{aligned}$$

Con ello queda verificado el Teorema de la Divergencia.

**Ejemplo 6.100** Verifique el Teorema de la Divergencia para el campo vectorial identidad  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ , sobre la superficie  $S$  que acota el sólido  $Q$  formado por  $x^2 = 1 - y$ ,  $z = y$  y  $z = 0$ , como lo muestra la figura 6.59.

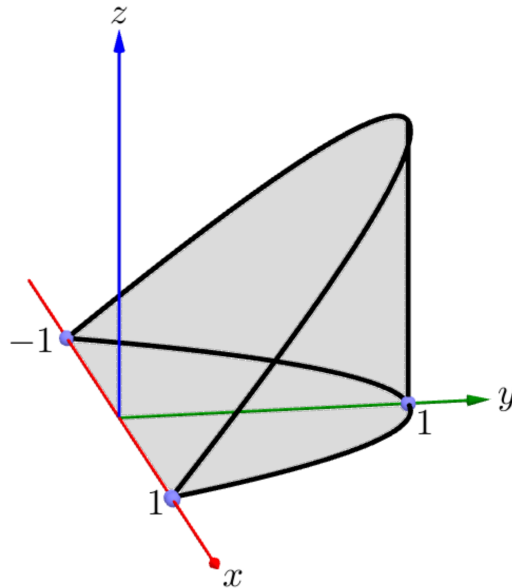


Figura 6.59: Sólido  $Q$  acotado por la superficie  $S$

**Solución:** Se debe verificar que la integral de superficie  $\iint_S F \cdot dS$ , donde  $S$  es claro que está

6.9. Teorema de la Divergencia

conformada por la unión de tres superficies, debe tener el mismo valor que  $\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV$ .

- Para calcular la integral de superficie, note que

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS + \iint_{S_3} F \cdot dS,$$

donde  $S_1$  es la parte del cilindro generalizado  $x^2 = 1 - y$ ,  $S_2$  es la porción del plano  $z = y$  y  $S_3$  del plano  $z = 0$ .

Con ello, para la integral de superficie sobre  $S_1$ , observe que esta superficie se puede parametrizar como  $r_1(x, z) = (x, 1 - x^2, z)$ , donde  $(x, z) \in R = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$ . Entonces se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \iint_R F(r_1(x, z)) \cdot (-y_x, 1, -y_z) \, dA \\ &= \iint_R (x, 1 - x^2, z) \cdot (2x, 1, 0) \, dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (x^2 + 1) \, dz \, dx \\ &= 8/5. \end{aligned}$$

Ahora, la superficie  $S_2$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, y)$  donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ . Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS &= \iint_R F(r_2(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (x, y, y) \cdot (0, -1, 1) \, dA \\ &= \iint_R (-y + y) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, para la superficie  $S_3$ , esta se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 0)$  donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS &= \iint_R F(r_3(x, y)) \cdot -(-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Según los datos anteriores se cumple que

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{8}{5} + 0 + 0 = \frac{8}{5}.$$

- Para determinar el valor de la integral triple  $\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV$ , note que  $\operatorname{div} F = 3$  y si se considera  $Q$  como un sólido de tipo 1 para escribir dicha integral en el orden  $dzdydx$ , se tendría que

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV &= 3 \iiint_Q dV \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^y dzdydx \\ &= 8/5. \end{aligned}$$

Con este resultado se verifica el Teorema de la Divergencia.

**Ejemplo 6.101** Considere el cuerpo sólido  $Q$  acotado por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y \geq 0$ ),  $z = 0$ ,  $z = 9$  y  $y = 0$ . Aplique el Teorema de la Divergencia al campo vectorial  $F(x, y, z) = (1 + y^2)\vec{j}$  para calcular  $\iint_{S_1} F \cdot dS$ , donde  $S_1$  es la porción cilíndrica del sólido  $Q$ .

**Solución:** Un dibujo del sólido  $Q$  se muestra en la figura 6.60

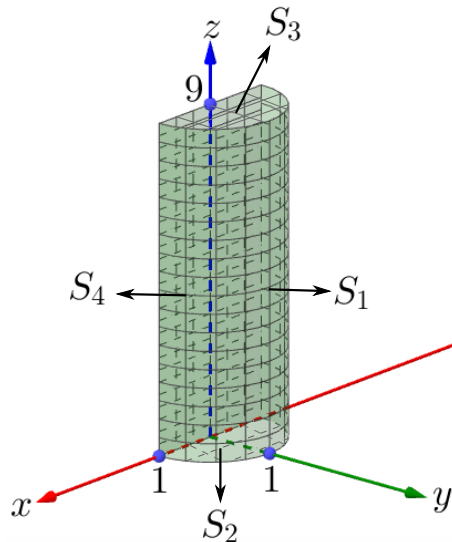


Figura 6.60: Sólido  $Q$  acotado por la superficie  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$



## 6.9. Teorema de la Divergencia

Note que el sólido  $Q$  está acotado por una superficie que a la vez es la unión de otras cuatro superficies, entonces, si se aplica el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS + \iint_{S_3} F \cdot dS + \iint_{S_4} F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV,$$

de donde se deduce que

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \underbrace{\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV}_I - \underbrace{\iint_{S_2} F \cdot dS}_{I_2} - \underbrace{\iint_{S_3} F \cdot dS}_{I_3} - \underbrace{\iint_{S_4} F \cdot dS}_{I_4}.$$

Luego, dado que  $F(x, y, z) = (0, 1 + y^2, 0)$ , entonces  $\operatorname{div} F = 2y$ . Así, para calcular  $I$  se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iiint_Q 2y \, dV \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^9 2r^2 \operatorname{sen} \theta \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 12. \end{aligned}$$

Ahora, para calcular  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ , recuerde que los vectores normales unitarios deben ser exteriores a  $S$ . Con ello, para hallar el valor de  $I_2$ , observe que la superficie  $S_2$  se parametriza como  $r_2(x, y) = (x, y, 0)$ , donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Así,

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} F \cdot dS = \iint_R F(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= \iint_R (0, 1 + y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente, para  $I_3$ , la superficie  $S_3$  se parametriza como  $r_3(x, y) = (x, y, 9)$ , donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{S_3} F \cdot dS = \iint_R F(x, y, 9) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\ &= \iint_R (0, 1 + y^2, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para  $I_4$ , una parametrización para  $S_4$  es  $r_4(x, z) = (x, 0, z)$  donde  $(x, z) \in R = [-1, 1] \times [0, 9]$ . Con ello,

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{S_4} F \cdot dS = \iint_R F(x, 0, z) \cdot (0, -1, 0) dA \\ &= \iint_R (0, 1 + (0)^2, 0) \cdot (0, -1, 0) dA \\ &= - \iint_R dA \\ &= -A_R = -2 \cdot 9 = -18. \end{aligned}$$

Por último, recopilando los resultados anteriores se tiene que

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = 12 - 0 - 0 + 18 = 30.$$

**Ejemplo 6.102** Sea el campo eléctrico  $F(x, y, z) = \frac{b\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ , donde  $b \in \mathbb{R}^+$  y  $\vec{x} = (x, y, z)$ , definido en la región  $Q$  que se encuentra entre las superficies cerradas  $S_1$  y  $S_2$ , con  $S_2$  una superficie regular y simple arbitraria que contiene a  $S_1$ , donde  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ , como se muestra en la figura 6.61.

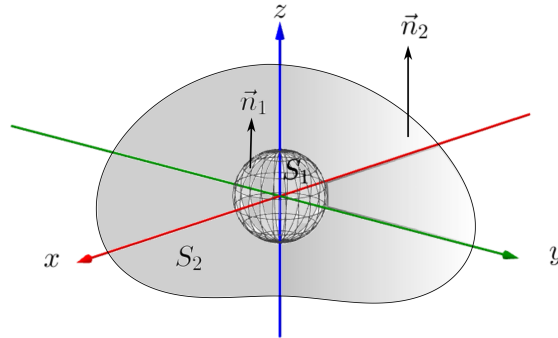


Figura 6.61: Superficies  $S_1$  y  $S_2$

1. Suponiendo que  $\text{div } F = 0$ , muestre que  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \iint_{S_2} F \cdot dS$ .
2. Justifique por qué el vector  $\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$  es normal a  $S_1$  y use este hecho para mostrar que  $F \cdot \vec{n}_1 = \frac{b}{a^2}$ .
3. Concluya la Ley de Gauss, la cual establece que  $\iint_{S_2} F \cdot dS = 4\pi b$ .

**Solución:**

1. Sean  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  los vectores normales exteriores a  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente, como se muestra en la figura 6.61. Además sea  $Q$  el sólido limitado por fuera de la superficie  $S_1$  y por dentro de la superficie  $S_2$ . Con ello, se puede establecer que  $Q$  está limitado por la superficie  $S = S_1 \cup S_2$ . Luego, al aplicar el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV,$$

pero como  $\operatorname{div} F = 0$  y  $S = S_1 \cup S_2$ , se induce que

$$\iint_{S_1} F \cdot -\vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0,$$

lo cual implica que

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0,$$

El signo negativo del vector  $\vec{n}_1$  se debe a que dicho vector apunta hacia dentro del sólido  $Q$ , entonces se debe cambiar la dirección para poder usar el Teorema de la Divergencia.

2. Según el resultado anterior, se puede calcular el valor de la integral de superficie sobre  $S_2$  trabajando sobre la superficie esférica  $S_1$ , cuya dirección de  $\vec{n}_1$  es el gradiente de la esfera, esto es

$$\vec{n}_1 = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\|(2x, 2y, 2z)\|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Puesto que  $\vec{x} = (x, y, z)$ , entonces se deduce que  $\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ . Además de aquí se sigue que

$$F \cdot \vec{n}_1 = \frac{b\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{b\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4} = \frac{b}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{b}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{b}{a^2}.$$

3. Note que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS &= \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS \\ &= \iint_{S_1} \frac{b}{a^2} \, dS \\ &= \frac{b}{a^2} \iint_{S_1} dS \\ &= \frac{b}{a^2} A_{S_1} \\ &= 4\pi b, \end{aligned}$$

donde  $A_{S_1}$  denota el área de la superficie esférica  $S_1$ , la cual es  $A_{S_1} = 4\pi a^2$ .

**Ejemplo 6.103** Considere el conjunto de cajas rectangulares definido por

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq 1\}.$$

De todas estas cajas rectangulares determine los valores de  $a$  y  $b$  de aquella para la cual la integral de flujo  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$  es máxima, donde  $F(x, y, z) = (-x^2 - 4xy, -6yz, 12z)$  y  $S$  corresponde a las seis caras de  $Q$ . **Sugerencia:** use el Teorema de la Divergencia.

**Solución:** Por el Teorema de la Divergencia se tiene que

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV,$$

donde  $\operatorname{div} F = -2x - 4y - 6z + 12$ , con ello se cumple que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_0^a \int_0^b \int_0^1 (-2x - 4y - 6z + 12) \, dz \, dy \, dx \\ &= -a^2b - 2ab^2 + 9ab. \end{aligned}$$

Ahora defina la nueva función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(a, b) = -a^2b - 2ab^2 + 9ab$ . Se va proceder a hallar los valores máximos de dicha función, donde es claro que  $a > 0$  y  $b > 0$  pues son distancias. Luego, los puntos críticos se hallan haciendo  $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ , de donde se forma el sistema

$$\begin{cases} b(-2a - 2b + 9) = 0 \\ a(-a - 4b + 9) = 0 \end{cases},$$

aquí se descarta el hecho que  $a = b = 0$ . Siguiendo con la resolución del sistema de ecuaciones anterior, se llega a que  $a = 3$  y  $b = \frac{3}{2}$ , por tanto el punto generado es  $P(3, \frac{3}{2})$ . Falta mostrar que es un punto máximo de  $f$ , para lo cual se usa el Hessiano ordinario, esto es

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & -2a - 4b + 9 \\ -2a - 4b + 9 & -4a \end{pmatrix}.$$

Con ello  $\left| H_f \left( 3, \frac{3}{2} \right) \right| = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -12 \end{vmatrix} = 27 > 0$ , por lo que el punto  $P(3, \frac{3}{2})$  es un máximo de la función  $f$  y cuyo valor es  $f(3, \frac{3}{2}) = \frac{27}{2}$ .

## Ejercicios

**Ejercicio 327** Calcule la integral de flujo  $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$  donde  $F(x, y, z) = (2x^2, -3y, z^2)$  y  $S$  es la superficie cerrada que limita al cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$  y  $z = 2$ .

1. Sin usar el Teorema de la Divergencia.
2. Usando el Teorema de la Divergencia.

**Ejercicio 328** Sea el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xy, y^2, yz)$  y sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$  y  $z = 1 - x^2$ . Verifique el Teorema de la Divergencia, recordando que  $\vec{n}$  es la normal unitaria exterior.

**Ejercicio 329** Verifique el Teorema de la Divergencia para el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xy, -x^2, z^2)$  y la superficie  $S$  que cubre al sólido  $Q$  limitado inferiormente por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

**Ejercicio 330** Considere el sólido cerrado  $Q$  acotado por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x - z = 1$  y  $x + z = 1$  y sea el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xy^2 + 2, x^2y - 2, x^2y^2)$ . Muestre que

$$\iint_S F \cdot dS = \pi,$$

usando Teorema de la Divergencia y sin usar el Teorema de la Divergencia.

**Ejercicio 331** Utilice el Teorema de la Divergencia para calcular la integral

$$I = \iint_S (4x + z, x - y^2, 2yz) \cdot \vec{n} \, dS,$$

donde  $S$  cubre el sólido  $Q$ , encerrado entre la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  y los planos  $z = -3$  y  $z = 3\sqrt{3}$ . **Sugerencia:** puede ayudar lo hecho en el ejemplo 5.76.

**Ejercicio 332** Aplique el Teorema de la Divergencia para calcular

$$\iint_{S_1} F \cdot dS,$$

donde  $F(x, y, z) = (z \arctan y^2, z^3 \ln(1 + x^2), z)$  y  $S_1$  es la parte del paraboloide  $x^2 + y^2 + z = 2$ , que se encuentra sobre el plano  $z = 1$ .

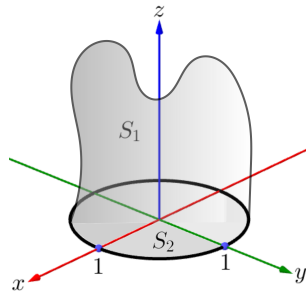
**Ejercicio 333** Considere el sólido  $Q$  limitado por arriba por la superficie  $S_1 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , la cual es un semicono, y por abajo por la superficie  $S_2 : z = x^2 + y^2$ , que corresponde a un paraboloides. Use el Teorema de la Divergencia para calcular  $\iint_{S_1} F \cdot dS$ , donde  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ .

**Ejercicio 334** Aplique el Teorema de la Divergencia al campo vectorial identidad  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  para calcular el volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , mediante una integral de superficie sobre este cuerpo sólido.

**Ejercicio 335** Aplique el Teorema de la Divergencia para mostrar que

$$I = \iint_{S_1} F \cdot dS = \pi,$$

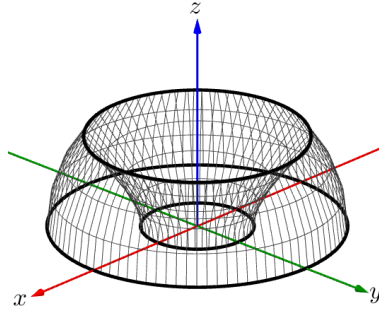
donde  $F(x, y, z) = (2xy, -y^2, 1)$  y donde  $S$  es la superficie mostrada en la siguiente figura. **Sugerencia:** considere la superficie cerrada dada por  $S_1 \cup S_2$ , donde  $S_2$  es el disco unitario en el plano  $z = 0$ .



**Ejercicio 336** Sea  $S_1$  la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  donde  $z \leq 1$ , y con vector normal hacia afuera. Aplique el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de superficie  $\iint_{S_1} F \cdot dS$ , donde  $F(x, y, z) = (z^5 + y, \cos(2\pi x^2) + e^{x+z}, \frac{z^2}{2})$ . **Sugerencia:**  $S_1$  no es una superficie cerrada y puede ayudar la resolución del ejemplo 6.101.

**Ejercicio 337** Aplique el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de superficie  $I = \iint_S F \cdot \vec{n} dS$ , donde  $F(x, y, z) = (x, y^2, y + z)$  y donde  $S$  es la frontera del sólido  $Q$  que corresponde al cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  entre los planos  $z = x$  y  $z = 8$ , tal que  $\vec{n}$  es un vector normal unitario que apunta hacia el exterior de  $S$ .

**Ejercicio 338** Mediante el Teorema de la Divergencia calcule la integral de superficie  $\iint_S F \cdot dS$ , donde el campo vectorial es  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $S$  es la superficie que limita el sólido  $Q$  ubicado sobre el plano  $z = 0$ , dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 7$  y por fuera del hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , como lo muestra la figura adjunta.



**Ejercicio 339** Utilice el Teorema de la Divergencia para determinar el valor de la integral de superficie  $I = \iint_S F \cdot dS$ , donde  $S$  corresponde a la esfera centrada en el origen y de radio 2 y  $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ .

**Ejercicio 340** Utilice el Teorema de la Divergencia para determinar el valor de la integral de superficie  $\iint_S F \cdot dS$ , donde el campo vectorial es

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

definido en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  y  $S$  es la esfera  $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ . **Sugerencia:** use el resultado obtenido en el ejercicio 249.

**Ejercicio 341** Aplique el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de superficie

$$\iint_S (xy + yz + zx) dS,$$

donde  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . **Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 6.96.

**Ejercicio 342** Sea  $S$  la superficie abierta que corresponde al hemisferio norte de la esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$

1. Halle el vector normal exterior unitario  $\vec{n}$  de la superficie  $S$  y halle el campo  $F$  tal que  $F \cdot \vec{n} = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{(z - 1)^2}{3}$ . **Sugerencia:** use como referencia el ejemplo 6.96.

2. Utilice el Teorema de la Divergencia para halla el valor de

$$\iint_S \left( \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{(z - 1)^2}{3} \right) dS.$$

**Sugerencia:** la superficie no es cerrada, por tanto puede usar como referencia el ejemplo 6.101.

## 6.10. Teorema de Stokes

Antes de escribir el Teorema de Stokes, es importante recordar que el rotacional de un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $F = (f_1, f_2, f_3)$  está dado por la fórmula

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

También, recuerde que el Teorema de Green en el plano establece la fórmula

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA,$$

donde  $\mathcal{C}$  es una curva regular a trozos cerrada simple recorrida en dirección positiva y  $R$  la región que consta de  $\mathcal{C}$  y su interior, con  $f_1$  y  $f_2$  campos escalares con continuidad en una región abierta que contiene a  $R$ .

Se puede observar que el rotacional de un campo vectorial  $F = (f_1, f_2, f_3)$  está relacionado con el Teorema de Green en el plano, en efecto, note que

$$\text{rot } F \cdot \vec{k} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

donde  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Con esto, la fórmula que establece el Teorema de Green en el plano se puede escribir como

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \text{rot } F \cdot \vec{k} dA.$$

En este punto cabe interrogarse sobre la existencia de una fórmula similar para una curva  $\mathcal{C}$  regular a trozos cerrada simple y recorrida en dirección positiva **en el espacio**, cuyo interior es una superficie  $S$ . Es decir, la curva  $\mathcal{C}$  es la frontera o borde de una superficie en tres dimensiones.

Efectivamente el Teorema de Stokes establece ciertas condiciones para usar una fórmula similar a la fórmula del Teorema de Green pero para una curva  $\mathcal{C}$  en el espacio, por ello, usualmente se le conoce al Teorema de Stokes como el Teorema de Green en el espacio.

De hecho, el Teorema de Stokes permite calcular una integral de línea sobre una curva cerrada  $\mathcal{C}$  en el espacio mediante una integral de superficie (la superficie encerrada por la curva  $\mathcal{C}$ ) si el vector normal unitario  $\vec{n}$  en la integral de superficie, se escoge de tal manera que si se camina sobre la curva en el lado de la superficie en la que está el vector normal unitario, la superficie va quedando hacia la izquierda del caminante, como lo muestra la figura 6.62.



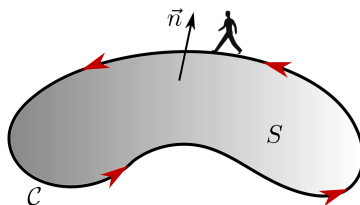


Figura 6.62: Regla del caminante

En este caso se dice, informalmente, que el vector normal unitario  $\vec{n}$  se escogió de tal manera que la curva  $\mathcal{C}$  tiene orientación positiva respecto a  $\vec{n}$ . Esto es conocido como “Regla del Caminante”, la cual menciona que un caminante que se mueve sobre una curva  $\mathcal{C}$ , verá que el vector unitario de  $S$ , a saber  $\vec{n}$ , sale a su izquierda siempre, como se aprecia en la figura 6.62 anterior.

A veces se le llama “Regla de la mano derecha”, por la posición del pulgar de la mano derecha cuando los otros dedos apuntan en una dirección, según se puede observar en la figura 6.63.



Figura 6.63: Regla de la mano derecha

Ejemplos de esta regla se pueden observar en las superficies de la figura 6.64.

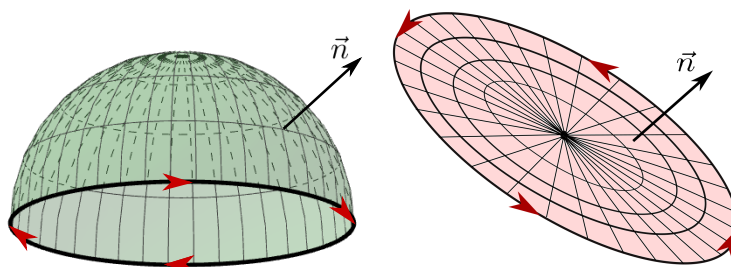


Figura 6.64: Semiesfera con el borde orientado positivamente respecto al vector  $\vec{n}$ . Porción de un plano con el borde orientado positivamente respecto al vector  $\vec{n}$

**Teorema 6.9 (Teorema de Stokes)** Sea  $S$  una superficie orientable no cerrada cuyo borde  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada simple regular a trozos y sea el campo vectorial  $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$  cuyos componentes tienen derivadas parciales

continuas sobre un conjunto abierto que contiene a  $S$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS,$$

donde  $\mathcal{C}$  tiene orientación positiva con respecto a  $\vec{n}$ .

**Observación 6.39** Una forma alternativa de expresar la fórmula del teorema 6.9 es

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \iint_S \text{rot } F \cdot dS.$$

Además, el Teorema de Stokes es para superficies orientables, por ello los ejercicios y ejemplos que se propongan cumplirán esta condición.

**Ejemplo 6.104** Sea  $S$  la porción del plano  $z = 2$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y sea  $\mathcal{C}$  el borde de  $S$ , la cual está recorrida en sentido antihorario vista desde el origen. Si  $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ ,

1. Calcule  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  usando la definición de integral de línea.
2. Calcule  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$  usando el Teorema de Stokes.

**Solución:**

1. El dibujo de la curva  $\mathcal{C} : \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$  se aprecia en la figura 6.65. Observe que esta se puede parametrizar como  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$ , donde  $t \in [0, 2\pi]$ , pero de acuerdo con la dirección que lleva, a la hora de calcular la integral de línea se debe agregar un signo negativo.

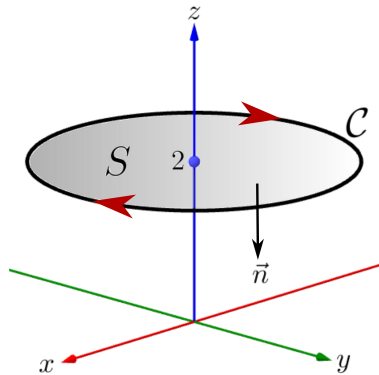


Figura 6.65: Superficie  $S$  cuyo borde es la curva  $\mathcal{C}$

Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \oint_{\mathcal{C}} 3y dx - xz dy + yz^2 dz \\
 &= - \int_0^{2\pi} (6 \operatorname{sen} t \cdot -2 \operatorname{sen} t - 4 \cos t \cdot 2 \cos t + 8 \operatorname{sen} t \cdot 0) dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} (-12 \operatorname{sen}^2 t - 8 \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( 12 \left( \frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) + 8 \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) \right) dt \\
 &= 20\pi.
 \end{aligned}$$

2. Tome  $f_1(x, y, z) = 3y$ ,  $f_2(x, y, z) = -xz$  y  $f_3(x, y, z) = yz^2$ , si se usa el Teorema de Stokes, note que

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = (x + z^2, 0, -3 - z),$$

además que la superficie  $S$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 2)$  donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Luego, considerando la Regla de la mano derecha, se tiene que

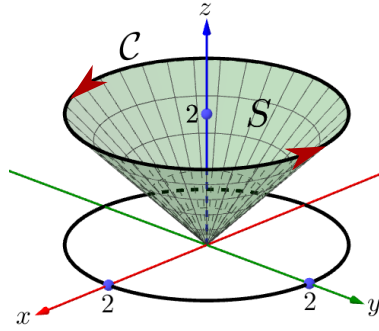
$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS \\
 &= \iint_R (x + z^2, 0, -3 - z) \cdot -(0, 0, 1) dA \\
 &= \iint_R (3 + z) dA \\
 &= 5 \iint_R dA \text{ pues } z = 2, \\
 &= 5A_R = 20\pi,
 \end{aligned}$$

precisamente el resultado de la parte anterior.

**Ejemplo 6.105** Verifique el teorema de Stokes para el campo  $F(x, y, z) = (x^2 - y, 4z, x^2)$  integrando sobre la superficie del semicono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , limitado por el plano  $z = 2$ .

### Solución:

Sea  $\mathcal{C}$  la curva de intersección entre el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el plano  $z = 2$ , suponiendo que esta se mueve en dirección positiva, así, un dibujo de la superficie cónica y la curva se muestra en la figura 6.66.


 Figura 6.66: Superficie cónica  $S$  y la curva  $C$ 

Cabe destacar que también se puede verificar el Teorema de Stokes sobre la superficie plana  $z = 2$ , sin embargo, en el ejemplo se indica explícitamente que se debe integrar sobre la superficie cónica  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Con ello, se debe verificar que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS,$$

donde la curva  $C$  se puede parametrizar como  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$  con  $t \in [0, 2\pi]$  y la superficie  $S$  se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ , con  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Con estos datos se hace lo siguiente.

- La integral de línea se resuelve como

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \oint_C (x^2 - y) dx + 4z dy + x^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} ((4 \cos^2 t - 2 \sin t) \cdot -2 \sin t + 8 \cdot 2 \cos t + 4 \cos^2 t \cdot 0) dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (-2 \cos^2 t \sin t + \sin^2 t + 4 \cos t) dt \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

- La integral de superficie se resuelve como

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS &= \iint_R (-4, -2x, 1) \cdot \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dA \\ &= \iint_R \left( \frac{4x + 2xy + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + r) r dr d\theta \\ &= 4\pi, \end{aligned}$$

con lo cual se verifica el Teorema de Stokes.

**Ejemplo 6.106** Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ , sobre la superficie  $S$  con normales exteriores, definida por  $z = 1 - x^2$  con  $0 \leq x \leq 1$  y  $-2 \leq y \leq 2$ .

**Solución:**

Una interpretación gráfica de la superficie  $S$  y la curva  $\mathcal{C}$ , la cual es regular a trozos y está compuesta por las curvas  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  y  $\mathcal{C}_4$ , se muestra en la figura 6.67. Se debe comprobar que

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr.$$

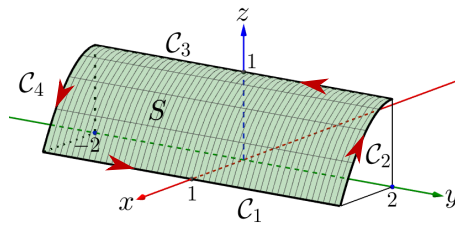


Figura 6.67: Superficie  $S$  cuyo borde es la curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$

- Para calcular  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS$ , fácilmente se obtiene que  $\text{rot } F = (-y, -z, -x)$ . Además, dado que  $S$  se encuentra sobre  $z = 1 - x^2$ , esta se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 1 - x^2)$  donde  $(x, y) \in R = [0, 1] \times [-2, 2]$ . Con ello se tendría que

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R (-y, -z, -x) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (-y, x^2 - 1, -x) \cdot (2x, 0, 1) \, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x) \, dydx = -2. \end{aligned}$$

- Para  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , note que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr.$$

La curva  $\mathcal{C}_1$  es una recta desde el punto  $(1, -2, 0)$  hasta el punto  $(1, 2, 0)$ , la cual se parametriza como  $r_1(t) = (1 - t)(1, -2, 0) + t(1, 2, 0) = (1, 4t - 2, 0)$  con  $t \in [0, 1]$ . Por

tanto se tendría que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_1} xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz \\ &= \int_0^1 ((4t - 2) \cdot 0 + 0 + 0) \, dt = 0\end{aligned}$$

La curva  $\mathcal{C}_2$  se genera de la intersección entre el cilindro generalizado  $z = 1 - x^2$  y el plano  $y = 2$ , así una parametrización es  $r_2(t) = (t, 2, 1 - t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ , pero por la dirección debe llevar un signo negativo. Con ello se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz \\ &= - \int_0^1 (2t \cdot 1 + (2 - 2t^2) \cdot 0 + (t - t^3) \cdot -2t) \, dt \\ &= -2 \int_0^1 (t - t^2 + t^4) \, dt = -\frac{11}{15}.\end{aligned}$$

La curva  $\mathcal{C}_3$  es una recta desde el punto  $(0, 2, 1)$  hasta el punto  $(0, -2, 1)$  y se parametriza como  $r_1(t) = (1 - t)(0, 2, 1) + t(0, -2, 1) = (0, 2 - 4t, 1)$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_3} xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz \\ &= \int_0^1 (0 + (2 - 4t) \cdot -4 + 0) \, dt \\ &= 8 \int_0^1 (-1 + 2t) \, dt = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, La curva  $\mathcal{C}_4$  se genera de la intersección entre el cilindro generalizado  $z = 1 - x^2$  y el plano  $y = -2$  y cuya parametrización es  $r_2(t) = (t, -2, 1 - t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ , por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_4} xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz \\ &= \int_0^1 (-2t \cdot 1 + (-2 + 2t^2) \cdot 0 + (t - t^3) \cdot -2t) \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (-t - t^2 + t^4) \, dt = -\frac{19}{15}\end{aligned}$$

Con la información anterior se concluye que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -\frac{30}{15} = -2,$$

resultado que permite verificar la veracidad de la fórmula del Teorema de Stokes.

**Ejemplo 6.107** Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial  $F(x, y, z) = (y + z, x + 2, x + y)$ , sobre la superficie  $S$  ubicada en el primer octante, determinada por la curva

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} .$$

### Solución:

Un dibujo de la superficie  $S$  y la curva  $\mathcal{C}$  se observa en la figura 6.68.

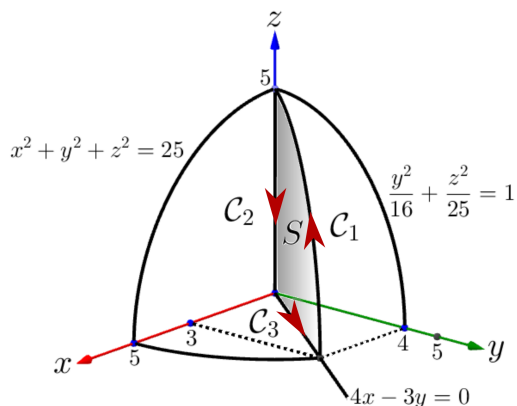


Figura 6.68: Superficie  $S$  cuyo borde es la curva  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$

Se debe comprobar que  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r}$ , donde es claro que  $\text{rot } F = (1, 0, 0)$ .

- Para  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS$ , la superficie  $S$  se puede parametrizar como

$$r(y, z) = \left( \frac{3}{4}y, y, z \right)$$

con  $(y, z) \in R$ , donde  $R$  es la proyección de  $S$  sobre el plano  $yz$  y corresponde a una **cuarta parte** de la región elíptica  $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \leq 1$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R (1, 0, 0) \cdot (1, -x_y, -x_z) \, dA \\ &= \iint_R (1, 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{3}{4}, 0\right) \, dA \\ &= \iint_R 1 \, dA \\ &= A_R = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \pi = 5\pi, \end{aligned}$$

- Para  $\oint_C F \cdot dr$ , observe que

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr.$$

La curva  $C_1$  corresponde al arco de circunferencia que va desde el punto  $(3, 4, 0)$  hasta el punto  $(0, 0, 5)$  y el cual está dado por la intersección entre el plano  $4x - 3y = 0$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ . Esta curva  $C_1$  se parametriza como  $r_1(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$  con  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , así

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr &= \int_{C_1} (y + z) \, dx + (x + 2) \, dy + (x + y) \, dz \\ &= \int_0^{\pi/2} ((4 \cos t + 5 \sin t) \cdot -3 \sin t + (3 \cos t + 2) \cdot -\sin t \\ &\quad + 7 \cos t \cdot 5 \cos t) \, dt \\ &= 5\pi - 20. \end{aligned}$$

Ahora, las curvas  $C_2$  y  $C_3$  son segmentos de recta que se parametrizan de forma respectiva como

$$\begin{aligned} r_2(t) &= (1-t)(0, 0, 5) + t(0, 0, 0) = (0, 0, 5-5t), \quad t \in [0, 1] \text{ y} \\ r_3(t) &= (1-t)(0, 0, 0) + t(3, 4, 0) = (3t, 4t, 0), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Con estas parametrizaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{C_2} F \cdot dr &= \int_{C_2} (y + z) \, dx + (x + 2) \, dy + (x + y) \, dz \\ &= \int_0^1 (0 + 0 + 0) \, dt = 0. \end{aligned}$$



6.10. Teorema de Stokes

y que

$$\begin{aligned} \int_{C_3} F \cdot dr &= \int_{C_3} (y+z) dx + (x+2) dy + (x+y) dz \\ &= \int_0^1 (4t \cdot 3 + (3t+2) \cdot 4 + 0) dt = 20. \end{aligned}$$

Con los datos anteriores se comprueba el Teorema de Stokes ya que

$$\oint_C F \cdot dr = 5\pi - 20 + 0 + 20 = 5\pi.$$

**Ejemplo 6.108** Sea  $S$  la porción del plano  $3x + 2y + z = 6$  en el primer octante y sea  $C$  la frontera de la superficie  $S$ , recorrida en sentido horario vista desde el origen. Calcule  $\oint_C F \cdot dr$  usando el Teorema de Stokes, donde  $F(x, y, z) = (x + y, 2x - z, y + z)$ .

**Solución:**

Un dibujo de la superficie  $S$  y la curva  $C$  se observa en la figura 6.69.

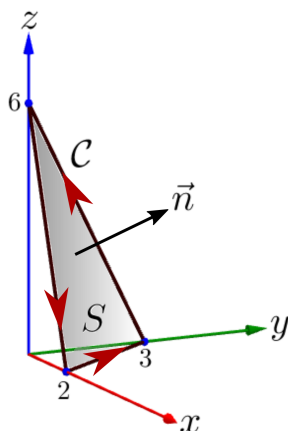


Figura 6.69: Superficie  $S$  cuyo borde es la curva  $C$

El Teorema de Stokes establece que  $\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$ , donde, en este caso, la superficie  $S$  está dada por la ecuación paramétrica  $r(x, y) = (x, y, 6 - 3x - 2y)$ , con  $(x, y) \in R =$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x\}$ . A partir de ello se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_R (2, 0, 1) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (2, 0, 1) \cdot \underbrace{(3, 2, 1)}_{\text{Es el vector normal del plano}} \, dA \\ &= 7 \iint_R dA = 7A_R = 21. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.109** Aplique el teorema de Stokes para evaluar la integral

$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

donde  $\mathcal{C}$  es la frontera de la sección del cubo sólido  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  y  $0 \leq z \leq a$ , que corta el plano  $x + y + z = \frac{3a}{2}$ , recorrida en sentido contrario al reloj, observado desde la parte positiva del eje  $x$ .

**Solución:**

Para dibujar la curva  $\mathcal{C}$  note que se está trabajando en el primer octante. Luego se procede a dibujar el cubo sólido y el plano, donde esta última superficie se dibuja determinando las intersecciones con los ejes coordenados, para después unirlos con segmentos, según lo muestra la figura 6.70.

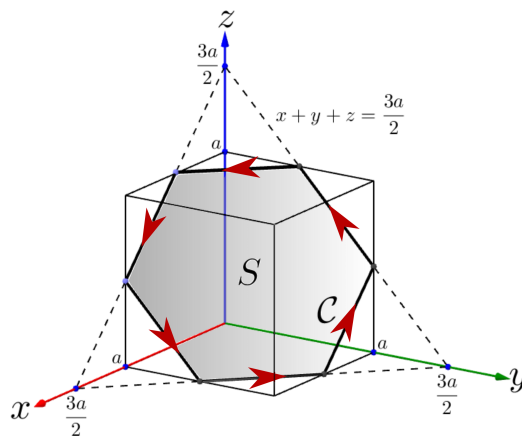


Figura 6.70: Superficie plana  $S$  y la curva  $\mathcal{C}$

Además, observe que la superficie  $S$  se puede proyectar sobre el plano  $xy$ , obteniendo como región  $R$  la mostrada en la figura 6.71. La región  $R$  a la vez, se puede dividir en dos subregiones,

6.10. Teorema de Stokes

esto es

$$R = \begin{cases} R_1 & = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, -x + \frac{a}{2} \leq y \leq a\} \\ R_2 & = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{2} \leq x \leq a, 0 \leq y \leq -x + \frac{3a}{2}\} \end{cases} .$$

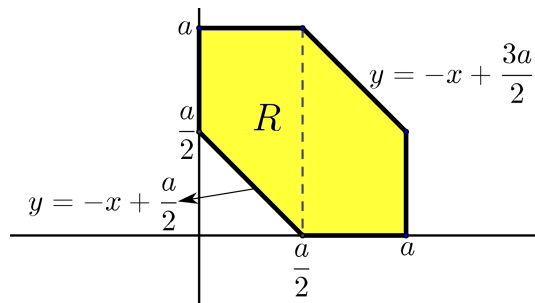


Figura 6.71: Región proyectada de la superficie  $S$  sobre el plano  $xy$

Con ello, la superficie  $S$  se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, \frac{3a}{2} - x - y)$ , donde  $(x, y) \in R$ . Claramente, la dirección del vector  $\vec{n}$  debe ser la del vector normal al plano  $x + y + z = \frac{3a}{2}$ , la cual es  $(1, 1, 1)$ , o bien, también es evidente que  $(-z_x, -z_y, 1) = (1, 1, 1)$ . Además, observe que  $\text{rot } F = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$ . Con todos los datos anteriores y recurriendo al Teorema de Stokes, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\ &= \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_R (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y) \cdot (1, 1, 1) \, dA \\ &= -4 \iint_R (x + y + z) \, dA, \text{ donde } x + y + z = \frac{3a}{2}. \\ &= -4 \iint_R \frac{3a}{2} \, dA \\ &= -6a A_R \\ &= -6a \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{9a^3}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.110** Use el teorema de Stokes para calcular  $\iint_S (0, 0, x) \cdot \vec{n} \, dS$ , donde  $S$  es la superficie definida por  $z = xy(1-x)(1-y)$  con  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$  (ver figura 6.72), y el vector normal unitario  $\vec{n}$  tiene la tercera componente positiva. **Sugerencia:** Calcule el  $\text{rot } F$  si  $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(0, x^2, 0)$ .

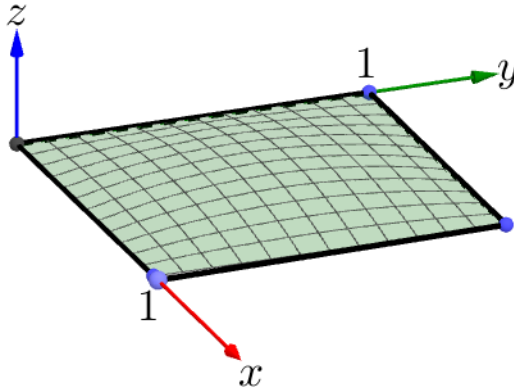


Figura 6.72: Superficie  $S$

**Solución:**

Según la sugerencia, tomando  $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(0, x^2, 0)$  se tiene que  $\text{rot } F = (0, 0, x)$ , entonces, usando el Teorema de Stokes se cumple que  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C F \cdot dr$ , donde la que se debe calcular es la integral de línea, considerando que  $C$  es el borde de la superficie y se recorre en sentido positivo, y según la figura 6.72, está compuesta por cuatro segmentos, suponga  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ , por tanto queda

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr.$$

- Sea  $C_1$  el segmento de punto inicial  $(0, 0, 0)$  y punto final  $(1, 0, 0)$ , que se parametriza como  $r_1(t) = (t, 0, 0)$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr &= \int_{C_1} \frac{1}{2}x^2 \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 \cdot 0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

6.10. Teorema de Stokes

- Sea  $\mathcal{C}_2$  el segmento que va desde el punto  $(1, 0, 0)$  y hasta el punto  $(1, 1, 0)$ , la cual se parametriza como  $r_2(t) = (1, t, 0)$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{2} x^2 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 1 dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Sea  $\mathcal{C}_3$  el segmento con punto inicial  $(1, 1, 0)$  y punto final  $(0, 1, 0)$ , la cual se parametriza como  $r_3(t) = (1 - t, 1, 0)$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{2} x^2 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - t)^2 \cdot 0 dt = 0 \end{aligned}$$

- Sea  $\mathcal{C}_4$  el segmento de recta que va desde  $(0, 1, 0)$  y hasta  $(0, 0, 0)$ , y se parametriza como  $r_4(t) = (0, 1 - t, 0)$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr &= \int_{\mathcal{C}_4} \frac{1}{2} x^2 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (0)^2 \cdot -1 dt = 0 \end{aligned}$$

Finalmente se tendría que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2},$$

siendo esta la respuesta buscada.

**Observación 6.40** En el ejemplo 6.110 anterior, se puede verificar el Teorema de Stokes, esto es calculando la integral de superficie  $\iint_S (0, 0, x) \cdot \vec{n} dS$  y debe dar como resultado  $\frac{1}{2}$ . En efecto, la superficie  $S$  se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, xy(1 - x)(1 - y))$ , o bien,  $r(x, y) = (x, y, xy - xy^2 - x^2y + x^2y^2)$ , donde  $(x, y) \in R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S (0, 0, x) \cdot \vec{n} dS &= \iint_R (0, 0, x) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x dy dx \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.111** Aplique el Teorema de Stokes para calcular el valor de la integral de línea  $I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde  $F(x, y, z) = (y \cos x, x + \sin x, \cos z)$  y la curva  $\mathcal{C}$  posee ecuación paramétrica  $r(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Solución:**

Al usar el Teorema de Stokes se tiene que

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS,$$

de esta forma primero se determina el rotacional de  $F$ , el cual es  $\text{rot } F = (0, 0, 1)$ . Posteriormente se necesita la superficie  $S$  que está contenida dentro de la curva  $\mathcal{C}$ , la cual está parametrizada por  $r(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , y se debe escribir como la intersección de dos superficies, esto es

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 1 + \sin t \\ z = 1 - \cos t - \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \cos t & (1) \\ y - 1 = \sin t & (2) \\ z = 1 - \cos t - \sin t & (3) \end{cases} .$$

De la ecuación (1) y (2) se deduce la ecuación cilíndrica  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Luego, al sustituir (1) y (2) en (3) se obtiene el plano  $z = 3 - x - y$ . Así, la superficie  $S$  se puede tomar sobre el cilindro o bien sobre el plano. Por facilidad se va tomar sobre el plano, entonces  $S$  se puede parametrizar como

$$r(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$$

donde  $(x, y) \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ . Con ello se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_R (0, 0, 1) \cdot (-z_x, -z_y, 1) \, dA \\ &= \iint_R (0, 0, 1) \cdot \underbrace{(1, 1, 1)}_{\text{Es el vector normal del plano.}} \, dA \\ &= \iint_R dA \\ &= A_R = \pi \cdot (1)^2 = \pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.112** Use el Teorema de Stokes para calcular la integral de línea

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (z^2 + \tan x) dx + (x^2 + \cos y) dy + (y^2 + e^z) dz,$$

en donde  $S$  es la superficie cuya frontera es la curva  $\mathcal{C}$ , formada por la intersección de  $x + z = 2$  y  $y^2 = 2xz$ . La curva  $\mathcal{C}$  es recorrida en el sentido de las agujas del reloj, vista desde el origen.

**Solución:**

Observe que la curva  $\mathcal{C}$  corresponde a

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x + z = 2 & (1) \\ y^2 = 2xz & (2) \end{cases},$$

cambie la ecuación (1) en (2), generando la elipse  $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ . Ahora, dado que la superficie  $S$  está sobre el plano  $x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$ , esta se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, 2 - x)$ , donde  $(x, y) \in R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}$ . Así, tomando  $F(x, y, z) = (z^2 + \tan x, x^2 + \cos y, y^2 + e^z)$  y usando el Teorema de Stokes se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr &= \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_R (2y, 2z, 2x) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dA \\ &= \iint_R (2y, 2z, 2x) \cdot (1, 0, 1) dA \\ &= 2 \iint_R (x + y) dA \\ &= 2 \iint_R (x + y) dA, \text{ aplique los cambios } x = 1 + r \cos \theta \text{ y } y = \sqrt{2}r \sin \theta, \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta + \sqrt{2}r \sin \theta + 1) \sqrt{2}r dr d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.113** Dado el campo vectorial  $F(x, y, z) = (y^2, x + 2z, 2y^2)$ , haga uso del Teorema de Stokes para hallar un plano  $ax + by + cz = 0$ , donde  $a, b$  y  $c$  son constantes no todas nulas, tal que

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$$

para toda curva cerrada y simple  $\mathcal{C}$  que está sobre el plano.

**Solución:**

Por el Teorema de Stokes se tiene que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = 0,$$

donde  $\operatorname{rot} F = (4y - 2, 0, 1 - 2y)$ . Además,  $S$  corresponde a la superficie del plano  $ax + by + cz = 0$ , donde es claro que un vector normal a dicho plano es  $(a, b, c)$ . Luego, para tener garantía que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = 0$$

debe ocurrir que  $\operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned} (4y - 2, 0, 1 - 2y) \cdot (a, b, c) &= 0 \\ \Rightarrow 4ay - 2a + c - 2cy &= 0 \\ \Rightarrow 2y(2a - c) - (2a - c) &= 0 \\ \Rightarrow (2a - c)(2y - 1) &= 0 \\ \Rightarrow c = 2a \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que  $c = 2a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , con estas condiciones se pueden hallar un infinidad de planos de la forma  $ax + by + cz = 0$  tales que  $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = 0$  y consecuentemente  $\oint_C F \cdot dr = 0$  por el Teorema de Stokes.

## Ejercicios

**Ejercicio 343** Utilice el Teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$I = \oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde  $C$  es la curva de intersección entre el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $x + y + z = 1$ . La orientación de dicha curva corresponde al movimiento contrario a las agujas del reloj en el plano  $xy$ .

**Ejercicio 344** Aplique el Teorema de Stokes para calcular el valor de la integral de línea

$$I = \oint_C (y + \operatorname{sen} x) dx + (z^2 + \cos y) dy + x^3 dz,$$

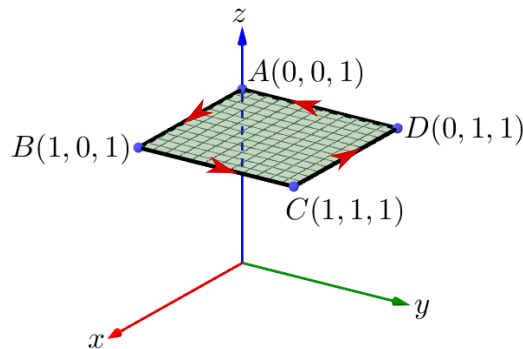


6.10. Teorema de Stokes

donde la curva  $\mathcal{C}$  está dada por  $r(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . **Sugerencia:** la dirección de la curva  $\mathcal{C}$ , vista desde el eje  $x$  positivo, está recorrida en sentido horario.

**Ejercicio 345** Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial  $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$ , integrando sobre el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  con  $z \geq 0$ .

**Ejercicio 346** Dado el campo vectorial  $F(x, y, z) = (e^{y-z}, 0, 0)$ , verifique el Teorema de Stokes para la superficie determinada por el cuadrado con vértices  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 0, 1)$  y  $C(1, 1, 1)$  y  $D(0, 1, 1)$ , como se muestra en la figura siguiente.



**Ejercicio 347** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$  y la superficie  $S$  dada por  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , con  $z \geq 0$ . Utilice el Teorema de Stokes para calcular  $I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde  $\mathcal{C}$  es el borde de  $S$ .

**Ejercicio 348** Aplique el Teorema de Stokes para hallar el valor de  $I = \oint_{\mathcal{C}} y dx - x dy$ , donde  $\mathcal{C}$  es la curva de intersección entre el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con el plano  $2x + 2y + z = 6$ .

**Ejercicio 349** Sea  $\mathcal{C}$  el paralelogramo que se obtiene al unir los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(0, , 2)$ ,  $D(1, 0, 1)$  y  $E(1, 1, 0)$  por medio de segmentos de recta, y orientado en dicho orden. Use el Teorema de Stokes para hallar el valor de

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (2y + z) dx + (4x + y - z) dy + (5x + 4y + z) dz.$$

**Sugerencia:** la curva  $\mathcal{C}$  encierra parte del plano  $x + y + z = 2$ .

**Ejercicio 350** Utilice el Teorema de Stokes para verificar la respuesta del ejemplo 6.34 de la página 362.

**Ejercicio 351** Sea  $S$  la parte del paraboloido  $z = 9 - x^2 - y^2$  para  $z \geq 0$ . Sea la curva  $\mathcal{C}$  la traza de  $S$  en el plano  $xy$ , es decir, es la curva de intersección entre el paraboloido dado y el plano  $z = 0$ , la cual es tomada en sentido contra reloj. Verifique el Teorema de Stokes para el campo  $F(x, y, z) = (3z, 4x, 2y)$ .

**Ejercicio 352** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2 + x)$ , y la curva  $\mathcal{C}$  generada por la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 8x$  con el plano  $x + y + z = 0$ . Use el Teorema de Stokes para hallar el valor de la integral de línea  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ .

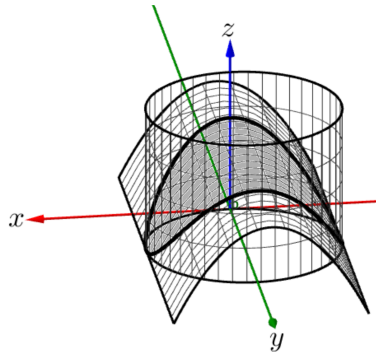
**Ejercicio 353** Aplicar el Teorema de Stokes para calcular  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS$ , donde  $F(x, y, z) = (y, z, x)$  y  $S$  es la porción del paraboloido  $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$  que queda por debajo del plano  $z = 2x$ , donde  $\vec{n}$  es el vector normal unitario a la superficie  $S$  cuya tercera componente es negativa.

**Ejercicio 354** Verifique el Teorema de Stokes para el campo  $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ , donde  $S$  es la superficie del paraboloido  $2z = x^2 + y^2$  limitado por el plano  $z = 2$ .

**Ejercicio 355** Verifique el Teorema de Stokes para el campo  $F(x, y, z) = (y, 2x, z^2)$ , usando como frontera de integración la curva de intersección entre el el plano  $z = 0$  y el elipsoide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ .

**Ejercicio 356** Sea el campo de fuerzas  $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$ . Use el Teorema de Stokes para calcular el trabajo  $W$  realizado al recorrer una sola vez, en sentido positivo, la curva de intersección entre  $|x| + |y| = 1$  y  $z = y$ , **vista desde arriba**. **Sugerencia:** el sólido  $|x| + |y| = 1$  es un cilindro recto de base cuadrada.

**Ejercicio 357** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (xy, x, z)$ , use el Teorema de Stokes para calcular la integral  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} \, dS$ , donde  $S$  es la superficie del cilindro generalizado  $z = 1 - x^2$  que queda dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , según se aprecia en la figura siguiente. Además, el vector  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a  $S$  con tercera componente positiva.



6.10. Teorema de Stokes

**Ejercicio 358** Considere la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (\cos t, \sin t - 2 \cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Use el Teorema de Stokes para calcular

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (xy - z^2) dx + (x + 3y) dy + z^3 dz.$$

**Sugerencia:** tenga como referencia el ejemplo 6.111 y por facilidad, considere proyectar la superficie sobre el plano  $xz$ .

**Ejercicio 359** Considere la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $r(t) = (3 \cos t + \sin t, 4 + \cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Utilice el Teorema de Stokes para calcular

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (y^2 z) dx + (3y + 1) dy + yz dz.$$

**Sugerencia:** tenga como referencia el ejemplo 6.111 y, por facilidad, valore proyectar la superficie sobre el plano  $yz$ .

# Capítulo 7

## Respuestas de ejercicios

### Ejercicios de la página 19

1. La ecuación simplificada es  $5(x - z)^2 + (2x + y - 4z)^2 = 9$ .
2. La ecuación es  $\frac{(3x-z)^2}{9} + \frac{(4y-z)^2}{16} = 9$ .
3. La ecuación es  $(x - \frac{z}{2})^2 + (x - \frac{z}{2})(y - \frac{3z}{4}) + (y - \frac{3z}{4})^2 = 0$ .
4. La ecuación sin simplificar corresponde a  $z + (z - 2) \left( \frac{-2-2x-2y+z}{2x+2y-z} \right) = \left( x + (x - 1) \left( \frac{-2-2x-2y+z}{2x+2y-z} \right) \right)^2 + \left( y + y \left( \frac{-2-2x-2y+z}{2x+2y-z} \right) \right)^2$ .
5. La ecuación simplificada corresponde a  $x^2 + y^2 + xy = \frac{8}{25}(x + y - z + 5)^2$ .
6. La ecuación es  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy = \frac{1}{2}(2 - x - y + z)^2$ .
7. El elipsoide es  $36(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 + 16z^2 = 144$ . Luego, la ecuación del cono es  $36(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 + 16z^2 = 144(x + y - 1)^2$ .
8. La ecuación sin simplificar del todo corresponde a  $(5x + 6y + z - 23)^2 + \frac{(15x+18y+z-159)^2}{16} + \frac{(5x+6y+z+87)^2}{4} = 100[(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2]$ . Si se simplificada un poco equivale a  $29(5x + 6y + z)^2 + 2206(5x + 6y + z) + 150421 = 1600 [(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2]$ .
9. La ecuación buscada es  $2xy - 20 = z^2$ .
10. La ecuación buscada es  $\frac{(y-2)^4}{16} = (x + 3)^2 + z^2$ .
11. La ecuación buscada es  $2(3x + 2y - z)^2 - 2(3x + 2y - z) + 14 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$ .
12. Una posible forma de la ecuación es  $13(3x + y)^2 - 86(3x + y) + 235 = 9((x + 2)^2 + y^2 + z^2)$ . Luego, al hacer  $z = 0$  se obtiene  $(x^2 + y^2)^2 - 68(x^2 + y^2)^2 + 256$  se forma una ecuación cuadrática, obteniendo  $x^2 + y^2 = 64$  y  $x^2 + y^2 = 4$ , es decir, se forman dos círculos centrados en el origen y de radio 8 y 2, respectivamente.

13. Una posible forma de la ecuación es  $(z^2 + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$ .

14. Una posible forma de la ecuación es  $13(3x + y)^2 - 86(3x + y) + 235 = 9((x + 2)^2 + y^2 + z^2)$ .

### Ejercicios de la página 35

15. 1.  $t \in \{0, 1/3, \sqrt[3]{2}\}$ .

2.  $(5, 3, 19)$ .

3. 0.

4.  $(\sqrt{77}, 2\sqrt{77}, -\sqrt{77})$ .

5.  $(-10, 2, -6)$ .

6. 16.

16. 1.  $r(t) = \left(\frac{-6}{11} + \frac{3}{11}t, \frac{-53}{22} + \frac{16}{11}t, t\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

2.  $r(t) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2} \operatorname{sen} t, a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

3.  $r(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

4.  $r(t) = (t^2, t, t^2 + t^4)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

5.  $r(t) = \left(\frac{t^2-1}{4}, t, \frac{(t^2-1)^2}{16} + t^2\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

6.  $r(t) = \left(\frac{1+2\sqrt{14}\cos t}{5}, \frac{-2+\sqrt{14}\cos t}{5}, \sqrt{\frac{14}{5}} \operatorname{sen} t\right)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

17. Una parametrización es  $r(t) = (10 \cos t, 3 \operatorname{sen} t, 3 \cos t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego,  $\|r'(t)\| = 3$  en  $t = 0$ , generando el punto  $(10, 0, 3)$ .

18. 1.  $r(t) = (1 + 2t, 4t, 2 - t)$  con  $t \in [0, 1]$ .

2.  $r(t) = (t - 1, 3 - 5t, t)$  con  $t \in [0, 1]$ .

19. 1.  $\mathcal{C} : \begin{cases} x = \sqrt{y-3} \\ z = 4(y-2)^2 + 3 \end{cases}$

3.  $\mathcal{C} : \begin{cases} z = \frac{y^2}{9} + 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

2.  $\mathcal{C} : \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 6x + y - 3z = 3 \end{cases}$

4.  $\mathcal{C} : \begin{cases} -x^2 + 5x + 9y = 4 \\ -2x^2 + 19x - 9z = 44 \end{cases}$

24.  $r(1/2) = (3/2, -1/2, 0)$ .

### Ejercicios de la página 59

25.  $v(t) = (2\sqrt{2}t, 2e^{2t}, -2e^{-2t})$ ,  $a(t) = (2\sqrt{2}, 4e^{2t}, 4e^{-2t})$  y una rapidez de  $2\sqrt{2t^2 + e^{4t} + e^{-4t}}$ .

26.  $v(4) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, 2, -1\right)$  y una rapidez de  $\sqrt{\frac{101}{20}}$ .
28.  $t = -3/2$ .
29. En los puntos  $r(2) = (-2, 12, 14)$  y  $r(-1) = (-2, 3, -4)$ .
30.  $r(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . La longitud de arco es  $2\pi$ .
31. 1.  $\sqrt{3}(1 - e^{-1})$ .
2. 4.
32.  $T(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2 \sin(2t), 2 \cos(2t), 3)$ ,  $N(t) = (-\cos(2t), -\sin(2t), 0)$  y  $B(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3 \sin(2t), -3 \cos(2t), 2)$ .
33.  $T(1) = \frac{1}{7}(-3, 2, 6)$ ,  $N(t) = \frac{1}{7\sqrt{17}}(22, 18, 5)$  y  $B(t) = \frac{1}{\sqrt{17}}(2, -3, 2)$ .
34. 1.  $B(3\pi/2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ .
2. La curvatura tiene como resultado  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sin importar el valor de  $t$ .
35. 1.  $r(t) = (\sqrt{25-t}, \sqrt{t}, \sqrt{10-t})$  con  $t \in [0, 10]$ .
2.  $\pi_O : 128x + 81y - 5z = 750$ ,  $\pi_N : -3x + 4y - 12z = -12$  y  $\pi_R : 952x - 1551y - 755z = -1600$ .
36.  $r(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1)$ . Luego,  $\pi_O : z = 1$ ,  $\pi_N : x - y = 0$  y  $\pi_R : x + y = 2$ .
37. 1.  $r(t) = (t, t^2, 2t)$ .
2.  $l_T : (x, y, z) = (1, 1, 2) + s(1, 2, 2)$ ,  $\pi_N : x + 2y + 2z = 7$  y  $\kappa(1) = \frac{\sqrt{20}}{27}$ .
38. 1.  $r(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t)$  y  $v(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t)$ .
2.  $l_T : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 1, 1)$  y  $\pi_N : -x + y + z = 1$ .
39. 1.  $r(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .
2.  $l_T : (x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + s\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  y  $\pi_N : -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$ .
40. 1.  $r(2) = (-4, -2, 4)$ .
2.  $r(1) = (-2, -3, 1)$ .
41. 1.  $r(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2, \sqrt{2} \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .
2. Note que  $r\left(\frac{7\pi}{4}\right) = (1, 2, -1)$ , por tanto  $t = \frac{7\pi}{4}$ . Con ello,  $T\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $N\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $B\left(\frac{7\pi}{4}\right) = (0, -1, 0)$  y  $\kappa\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

42.  $\kappa(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$  y  $N(t) = \left(0, \frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ .

43.  $\kappa(2) = \frac{1}{9}$  y la ecuación cartesiana del círculo osculador es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x+4)^2 + y^2 + \left(z - \frac{22}{3}\right)^2 = 81 \\ 6x - 6y + 3z = 2 \end{cases} .$$

44. La ecuación cartesiana del círculo osculador es

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 \\ z = 3 \end{cases} .$$

45.  $\tau(t) = \frac{6}{\sqrt{18t+1}} \neq 0$ .

46. 1.  $\tau(t) = 0$ , esto prueba que es una curva plana.

2. Sea  $x = e^t - 2t$ ,  $y = \frac{4e^t}{3} + 4t + \frac{1}{3}$  y  $z = \frac{e^t}{2+4t+4}$ , compruebe la igualdad  $2x - 3y + 4z = 15$ .

3.  $\pi_O : 2x - 3y + 4z = 15$  puesto que la curva es plana.

51. 1.  $T(t) = \frac{1}{3} \left(-2 \operatorname{sen} t + \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{cos} t, -\operatorname{sen} t - \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{cos} t, -2 \operatorname{sen} t\right)$  y  
 $N(t) = \frac{1}{3} \left(-2 \operatorname{cos} t - \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t, -\operatorname{cos} t + \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} t, -2 \operatorname{cos} t\right)$ .

2.  $T(2\pi) \cdot N(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 0$ .

3. Note que  $t = 0$ . Con ello,  $a_T(0) = 0$  y  $a_N(0) = 3$ .

52. 1.  $a_T(0) = \sqrt{5}$  y  $a_N(0) = 2$ .

3.  $T(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$ ,  $N(0) = (0, 1, 0)$  y  
 $B(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)$ .

2.  $\kappa(0) = \frac{2}{5}$ .

53. 1.  $a_T(1) = 0$  y  $a_N(1) = 2$ .

2.  $\kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $T(1) = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$  y  $N(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ .

3.  $l_B : (x, y, z) = \left(0, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right) + s(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2})$ .

4.  $\pi_N : x + \sqrt{2}y + z = \frac{5}{2}$ .

5.  $\pi_R : -x + z = \frac{1}{2}$ .

54.  $r(s) = \left(\left(\frac{bs}{\sqrt{b^2+1}} + a\right) \cos\left(\frac{1}{b} \ln\left(\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}}s + 1\right)\right), \left(\frac{bs}{\sqrt{b^2+1}} + a\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{b} \ln\left(\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}}s + 1\right)\right)\right)$ .

55.  $r(s) = \left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right), \cosh\left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)\right)$ .

### Ejercicios de la página 71

56. 1. Tome  $r_1(t) = (t, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0)$ .  
 2. Tome  $r_1(t) = (t, t)$  y  $r_2(t) = (0, t)$ .  
 3. Tome  $r_1(t) = (t^2, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0)$ .  
 4. Tome  $r_1(t) = (t, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0)$ .  
 5. Tome  $r_1(t) = (t, 0)$  y  $r_2(t) = (\sqrt[3]{t}, \sqrt{t})$ .  
 6. Tome  $r_1(t) = (t, 0)$  y  $r_2(t) = (\sqrt[4]{t}, t)$ .  
 7. Tome  $r_1(t) = (t, t)$  y  $r_2(t) = (t^2, t)$ .  
 8. Tome  $r_1(t) = (0, t)$  y  $r_2(t) = (t, t + t^3)$ .  
 9. Tome  $r_1(t) = (t, t, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0, 0)$ .  
 10. Tome  $r_1(t) = (t, t, t)$  y  $r_2(t) = (t, 0, t)$ .
58. 1. Continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .  
 2. Continua en  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \pm y\}$ .  
 3. Continua en  $\mathbb{R}^2$ .  
 4. Continua en  $\mathbb{R}^2$ .  
 5. Continua en  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{sen } y \neq 0\}$ .  
 6. Continua en  $\mathbb{R}^2$ .  
 7. Continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .  
 8. Continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .  
 9. Continua en  $\mathbb{R}^2$ .

### Ejercicios de la página 93

63.  $n = -\frac{3}{2}$ .
66.  $\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$ , que claramente es unitario y paralelo a  $\vec{u}$ .
67. 1. Los puntos son de la forma  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .  
 2. Corresponde a todos los puntos de la forma  $(a, -\frac{1}{2} + 2a, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .
68. 1. Es de grado  $\alpha = 1$ .  
 2. Es de grado  $\alpha = 2$ .  
 3. Es de grado  $\alpha = 0$ .  
 4. Es de grado  $\alpha = 0$ .  
 5. Es de grado  $\alpha = 3$ .  
 6. Es de grado  $\alpha = 2$ .
69.  $D_T(P) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .
70. 1.  $D_{T(-\pi/4)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .  
 2.  $\pi_N : -3x + 6y + z = 6$ .



71. 1.  $r(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, 0)$  donde  $t \in [0, 2\pi]$ .  
 2. Note que  $t = \frac{\pi}{4}$  para el punto  $P(\sqrt{2}, 1, 0)$ . Luego,  $D_T(P) = 0$ .  
 3. Usando la observación sugerida se concluye que  $D_{T(P)}(P) = 0$ .

72.  $D_T(P) = 0$ .

74. 1. El crecimiento máximo ocurre en la dirección  $\nabla f(P) = (2, 2, 2)$ . Luego  $D_{(2,2,2)}f(P) = 2\sqrt{3}$ .

2.  $D_Tf(P) = 0$ .

75.  $\nabla f(P) = \left( \frac{av_2 - bu_2}{u_1v_2 - v_1u_2}, \frac{bu_1 - av_1}{u_1v_2 - v_1u_2} \right)$ .

### Ejercicios de la página 129

76. El punto de tangencia es  $(1, 1, 1+e^2)$  y la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie es  $(2 + 2e^2)x + (1 + 2e^2)y - z = 2 + 3e^2$ .

77. La ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie es  $2x + 4\sqrt{2}y + z = 6$ . Luego, la recta se puede escribir como  $x = 1 + t$ ,  $y = \sqrt{2}t$  y  $z = 4 - 10t$ , esto se cambia en el plano y se verifica la igualdad.

78. La ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie es  $y = \sqrt{6}$ . Luego, dicho plano corta al cono  $y^2 = x^2 + z^2$  en el círculo  $x^2 + z^2 = 6$ , el cual es un círculo de radio  $\sqrt{6}$  sobre el plano  $y = 0$ . Este se puede parametrizar como  $r(t) = (\sqrt{6} \cos t, 0, \sqrt{6} \sin t)$ .

79.  $z = -3, z = \frac{5}{3}$ .

80.  $3x + 8y - 5z = \frac{73}{20}$ .

81. Los dos puntos de tangencia son  $\left( \frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right)$  y  $\left( -\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{9}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}} \right)$ .

82.  $y + z = 1$ .

83. El plano tangente es  $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$ . Luego, los cortes de este plano con los ejes coordenados son  $\left( \frac{a^2}{x_0}, 0, 0 \right)$ ,  $\left( 0, \frac{b^2}{y_0}, 0 \right)$  y  $\left( 0, 0, \frac{c^2}{z_0} \right)$ , con ello se deduce que el volumen del tetraedro es  $V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$ .

84. Defina  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ , por el teorema de la derivada implícita note que  $\nabla g(x, y, z) = \left( -\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1 \right)$ . Con ello, la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $P$  está dada por  $-x\frac{F_x}{F_z} - \frac{F_y}{F_z} - z = -a\frac{F_x}{F_z} - b\frac{F_y}{F_z} - c$ , es decir,  $xF_x + yF_y + zF_z = aF_x + bF_y + cF_z$ , donde  $F_x, F_y$  y  $F_z$  están evaluadas en el punto  $P$ .

90. Usando la regla de la cadena y simplificando al máximo se obtiene  $\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ .

91. Usando la regla de la cadena tanto para las derivadas lineales como de segundo orden, además de simplificar al máximo, se obtiene  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ .
92. Tome  $u = x + y$ , luego, usando la regla de cadena y simplificando se llega a que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ .
95. Usando la regla de la cadena se obtiene  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (4x^2 + 4y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ .
98. Por el Teorema de la Derivada Implícita  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_w - F_u}{F_w - F_v}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_u - F_v}{F_w - F_v}$ .
99. Por el Teorema de la Derivada Implícita  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2(yzF_w - x^2F_u)}{xy(z^2F_w - xyF_v)}$ .
100. Tomando  $x = 1$  y  $y = 1$  y usando el Teorema de la Derivada Implícita se obtiene que  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -5$ . Luego, usando este hecho y calculando  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , se llega a que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -20$ .
101. Por el Teorema de la Derivada Implícita  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -1 - \frac{F_v}{F_u}$ . Además  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-F_u^2 F_{vv} + 2F_u F_v F_{uv} - F_v^2 F_{uu}}{F_u^3}$ .

### Ejercicios de la página 153

106.  $P(3/4, -1/4)$  es un mínimo local.
107.  $P_1(-3, 0)$  y  $P_2(1, 0)$  son puntos de silla,  $P_3(-1, -2)$  es un máximo local.
108.  $P_1(2, 1/2)$  es un mínimo local,  $P_2(-2, -1/2)$  es un máximo y  $P_3(1, 1)$ ,  $P_4(-1, -1)$  son puntos de silla.
109.  $P_1(0, 0)$  es un punto de silla,  $P_2(-1/2, -1/2)$  y  $P_3(1/2, 1/2)$  son mínimos.
110. El único punto crítico es  $P(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  y es un punto de silla. Los puntos de la forma  $(x, -x)$  no son puntos críticos ya que se indefinen en  $f(x, y)$ .
111. Los puntos críticos son  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$  y  $P_3(-1, -1)$ .  $P_3(-1, -1)$  se clasifica como mínimo local.
112. Los puntos críticos son  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_3(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $P_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $P_5(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . Luego,  $P_5$  se clasifica como máximo local.
113. Los puntos críticos son  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(2, 0)$  y  $P_3(-1, 0)$ .  $P_1$  se clasifica como máximo local,  $P_2$  se clasifica como mínimo local y  $P_3$  como punto de silla.
114.  $P_1(-5, 2)$  es un mínimo local y  $P_2(-1, -2)$  es un punto de silla.
115.  $P_1(0, \frac{1}{e})$  es un punto de silla.
118. El único punto crítico es  $P(0, 0)$  y se clasifica como punto de silla.

- 119.** Si  $x, y, z$  son las dimensiones de la caja, la función por minimizar es  $f = 2xz + 2yz + xy$ , donde  $xyz = 100$ . Con ello defina  $f(x, y) = \frac{200}{x} + \frac{200}{y} + xy$  y concluya que  $(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200})$  es un mínimo, entonces las dimensiones son  $x = y = \sqrt[3]{200}$  y  $z = \sqrt[3]{25}$ .
- 120.** Se debe obtener el mínimo de la función  $d(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (2-x-y)^2}$ , y verifique que dicho punto mínimo es  $P(1, 2)$ , siendo la distancia menor  $\sqrt{3}$ .
- 121.** Todos se ubican en la frontera de  $R$  y corresponden a: el punto  $P_1(0, 0)$  que es un mínimo, el punto  $P_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right)$  que es un máximo y el punto  $P_3\left(1, \frac{1}{5}\right)$  que es un máximo. Con ello, el valor mínimo ocurre en  $P_1$  y el valor máximo en  $P_3$ .
- 122.** En el interior de  $R$  el único extremo es en el punto  $P_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$  y es un mínimo. Sobre la frontera los extremos ocurren en los puntos: punto  $P_2(0, 1)$  y es un mínimo,  $P_3(0, 0)$  y es un máximo,  $P_4\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$  y es un mínimo,  $P_5(-2, 0)$  y es un máximo,  $P_6(-1, 1)$  y es un mínimo,  $P_7(-2, 1)$  y es un máximo. Evaluando todos los puntos en  $f$  se concluye que el máximo valor ocurren en  $P_3$  y el mínimo valor  $P_1$ .
- 123.** En el interior de  $R$  no hay extremos. Parametrizando la frontera de  $R$  como  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , los extremos ocurren cuando  $t = \frac{\pi}{4}$  y es un máximo, y  $t = \frac{5\pi}{4}$  y es un mínimo. Respectivamente estos puntos son  $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  y  $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
- 124.** Los puntos críticos son  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(2, 2, 2)$  y  $P_3(-2, 2 - 2)$ , todos son puntos de silla.
- 125.** Los puntos críticos son  $P_1(1, 1, 1)$  y  $P_2(-1, 1, 1)$ , respectivamente se clasifican en un punto de silla y un máximo.
- 126.** Los puntos críticos son  $P_1\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$  y  $P_2\left(-2, 1, \frac{3}{2}\right)$ , respectivamente se clasifican en un punto de silla y un máximo.
- 127.** 1. Los puntos críticos son  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(1, 1, 1)$ ,  $P_3(-1, -1, 1)$ ,  $P_4(-1, 1, -1)$  y  $P_5(1, -1, -1)$ .  
2.  $(1, 1, 1)$  es un mínimo local.
- 128.** 1. Los puntos críticos son  $P_1(3/5, 2/5, 0)$ ,  $P_2(1, 1, 1)$ ,  $P_3(1, 1, -1)$ .  
2.  $(1, 1, -1)$  es un mínimo local.

## Ejercicios de la página 182

- 132.** Los extremos son  $P_1(1, 0, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 0)$ ,  $P_3(0, 2, 0)$ ,  $P_4(0, -2, 0)$ ,  $P_5(0, 0, 3)$  y  $P_6(0, 0, -3)$ . El valor mínimo de  $f$  ocurre en  $P_1$  y  $P_2$  y el valor máximo de  $f$  ocurre en  $P_5$  y  $P_6$ .
- 133.** Los extremos son  $P_{1,2}(0, 0, \pm 5)$ ,  $P_{3,4}(0, \pm\sqrt{5}, 0)$  y  $P_{5,6}(\pm 2, 0, 0)$ . Luego, evaluando en la función  $f$  esos puntos se deduce el máximo valor y el mínimo valor.
- 134.**  $P(3, 3, 3)$  es un mínimo condicionado.

- 135.**  $P(3, 3, 3)$  es un mínimo ligado.
- 136.** Los extremos son  $P_1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $P_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $P_3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  y  $P_4 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . Luego, el máximo valor ocurre en  $P_1$  y  $P_2$  y el mínimo valor en  $P_3$  y  $P_4$ .
- 137.** Los extremos son  $P_1 \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ ,  $P_2 \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ ,  $P_3 \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$  y  $P_4 \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$ . Con ello, el valor mínimo de  $f$  ocurre en los puntos  $P_1$  y  $P_3$  y el valor máximo en  $P_2$  y  $P_4$ .
- 138.** Los extremos son  $P_1 \left( 0, \frac{6}{5}, \frac{6}{5} \right)$ ,  $P_2 \left( 0, -\frac{6}{5}, -\frac{6}{5} \right)$ ,  $P_3 (2, 0, 0)$  y  $P_4 (-2, 0, 0)$ . Así,  $d((0, 0, 0), P_1) = d((0, 0, 0), P_2) = \frac{6}{5}\sqrt{2}$  y  $d((0, 0, 0), P_3) = d((0, 0, 0), P_4) = 2$ , por tanto la distancia mínima ocurre en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  y la máxima en los puntos  $P_3$  y  $P_4$ .
- 139.** Los extremos ligados son  $P_1 \left( 2\sqrt{\frac{5}{19}}, 3\sqrt{\frac{5}{19}}, 5\sqrt{\frac{5}{19}} \right)$ ,  $P_2 \left( -2\sqrt{\frac{5}{19}}, -3\sqrt{\frac{5}{19}}, -5\sqrt{\frac{5}{19}} \right)$ ,  $P_3 \left( \frac{40}{\sqrt{646}}, -35\sqrt{646}, \frac{5}{\sqrt{646}} \right)$  y  $P_4 \left( -\frac{40}{\sqrt{646}}, 35\sqrt{646}, -\frac{5}{\sqrt{646}} \right)$ . El valor máximo absoluto ocurren en  $P_1$  y  $P_2$  ya que  $f(P_1) = f(P_2) = 10$ . El valor mínimo absoluto ocurren en  $P_3$  y  $P_4$  ya que  $f(P_3) = f(P_4) = \frac{75}{17}$ . En realidad este ejercicio pedía la distancia máxima y mínima del origen a la curva de intersección entre el paraboloides  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$  y el plano  $x + y - z = 0$ .
- 140.** Los extremos son  $P \left( \pm \frac{18}{7}, \pm \frac{3}{7}, \pm \frac{2}{21} \right)$  con todas las posibles combinaciones de signos (en total son 9 puntos). Luego, dado que la función distancia  $d(x, y, z) = \left| \frac{2x+3y+6z-98}{7} \right|$  alcanza su valor mínimo cuando  $2x + 3y + 6z$  alcanza su valor máximo, y esto ocurre cuando  $x, y$  y  $z$  son todos positivos, así la distancia mínima ocurre en el punto  $P_1 \left( \frac{18}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{21} \right)$  donde  $d(P_1) = 13$ .
- 141.** En total son 10 extremos,  $P_{1,2}(\pm 1, 0, 0)$ ,  $P_{3,4,5,6,7,8,9,10} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ . Los extremos absolutos se producen en la frontera de  $Q$ , donde el valor máximo es  $\frac{1}{12\sqrt{3}}$  y  $-\frac{1}{12\sqrt{3}}$ .
- 142.** Al utilizar multiplicadores de Lagrange, en una de las ecuaciones que obtiene factorice  $y$ , y concluya que  $y = 0$  y que un multiplicador de Lagrange es también cero, en este caso  $\lambda_1 = 0$ . Al analizar el caso  $\lambda_1 = 0$  se llega a una contradicción, por tanto no produce puntos. El caso  $y = 0$ , produce el punto  $P_1 \left( \frac{16}{5}, 0, \frac{12}{5} \right)$ . Existe otro caso que debe analizar también, produciendo los puntos  $P_2(4, 3, 3)$ ,  $P_3(4, -3, 3)$ ,  $P_4(4, 3, -3)$ ,  $P_5(4, -3, -3)$ ,  $P_6(-4, 3, 3)$ ,  $P_7(-4, -3, 3)$ ,  $P_8(-4, 3, -3)$  y  $P_9(-4, -3, -3)$ . Luego, por la naturaleza de la función  $f(x, y, z) = z$ , es claro que el máximo valor ocurre en los puntos  $P_2, P_3, P_6$  y  $P_7$ , el cual equivale a 3, y el mínimo valor se da en los puntos  $P_4, P_5, P_8$  y  $P_9$ , el cual equivale a  $-3$ .
- 144.** El único punto crítico es  $P \left( \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right)$  el cual produce un valor mínimo de  $V$ , tal que  $V(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$ .
- 145.** El único extremo es  $P(3, 3, 3)$  y usando la matriz Hessiana Orlada se clasifica como un mínimo ligado.

146. Los extremos ligados son  $P_1(-1, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4})$  y  $P_2(1, \frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ . Luego,  $P_1$  es un máximo ligado y  $P_2$  es un mínimo ligado.
147. El único extremo es  $P(3, 3, 3)$  y usando la matriz Hessiana Orlada se clasifica como un mínimo ligado.
148.  $P_1$  es un mínimo ligado y en  $P_2$  no hay extremo.
149.  $P_1$  es un mínimo ligado y en  $P_2$  no hay extremo.
150. Sea  $P(x, y)$  un punto de la hipérbola, entonces la distancia de dicha hipérbola al origen es  $d((0, 0), P) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , así determine los extremos de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sujeta a la restricción  $x^2 - y^2 = 1$ . Establezca que los puntos  $P_1$  y  $P_2$  producen los valores mínimos de  $f$  y además clasifíquelos en mínimos ligados usando la matriz Hessiana Orlada.
151. Usando multiplicadores de Lagrange se concluye que los puntos críticos ligados son  $P_1(0, 2)$ ,  $P_2(0, -2)$ ,  $P_3(1, 0)$  y  $P_4(-1, 0)$ . Luego, el valor mínimo ocurre en  $P_1$  y  $P_2$ , el cual corresponde a 2017.
152. Debe probar que el punto  $(2, 2, 8)$  es un punto crítico de la función Lagrangiana  $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z - 16)$ . Luego, el punto  $(2, 2, 8)$  es un mínimo ligado.
153. 1. Los puntos críticos de  $f$  dentro de  $R$  son  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(0, 1)$ ,  $P_3(1, 0)$  y  $P_4(1, 1)$ , los cuales se clasifican usando el Hessiano de orden dos, en un máximo ligado, punto de silla, punto de silla y mínimo ligado, de forma respectiva.
2. Los extremos ligados son  $P_5(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $P_6(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $P_7(0, 2)$ ,  $P_8(0, -2)$ ,  $P_9(2, 0)$  y  $P_{10}(-2, 0)$ . Usando el Hessiano Orlado, se clasifican en un mínimo ligado, máximo ligado, máximo ligado, mínimo ligado, máximo ligado y mínimo ligado, de forma respectiva.
3. Evaluando los máximos y mínimos anteriores en la función  $f$ , se induce que el valor máximo ocurre en los puntos máximos  $P_7(0, 2)$  y  $P_9(2, 0)$  y el valor mínimo absoluto ocurre en  $P_8(0, -2)$  y  $P_{10}(-2, 0)$ .

### Ejercicios de la página 253

154. 1.  $\frac{1}{4} \ln \frac{27}{16}$ .
2.  $(1/e - e)\pi^2/8$ .
155. 1. Se debe invertir cambio el orden de integración. La respuesta es  $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$ .
2. Se debe invertir cambio el orden de integración. La respuesta es  $\frac{1}{6}(e^4 - 1)$ .
3. Se debe invertir cambio el orden de integración. La respuesta es  $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ .
156.  $I = \int_0^2 \int_{-3x^2}^{3x^2} \frac{1}{1+x^3} dy dx = 2 \ln 9$ .

157. 1.  $I = \int_0^1 \int_{2-\sqrt{4-y}}^{1-\sqrt{1-y}} f(x, y) dx dy + \int_1^4 \int_{2-\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y}}^2 f(x, y) dx dy.$

2.  $I = \int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\pi - \arcsen y} f(x, y) dx dy.$

3.  $I = \int_{-1}^0 \int_0^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx.$

4.  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^1 f(x, y) dy dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy dx.$

5.  $I = \int_0^a \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^{2\sqrt{2}a} \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y) dx dy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx dy.$

158.  $I = \int_0^{2a} \int_{a-\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{2ax-x^2}} \frac{1}{\sqrt{2a-x}} dy dx = \frac{8}{3} \sqrt{2} a^{3/2}.$

159.  $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx dy = \ln(4/3).$

160.  $I = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{3-2y} f(x, y) dx dy = 1.$

161.  $I = \int_{-\frac{\pi}{16} + \pi - 4}^{\pi - 4} \int_{\frac{\pi}{4} - \sqrt{y + \frac{\pi^2}{16} - \pi + 4}}^{\frac{\pi}{4} + \sqrt{y + \frac{\pi^2}{16} - \pi + 4}} f(x, y) dx dy + \int_{\pi - 4}^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx dy$   
 $+ \int_0^1 \int_{\frac{1}{2} \arcsen y}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsen(-y)} f(x, y) dx dy.$

162.  $A_R = \int_{-3}^{-2} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 1 dy dx + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} 1 dy dx + \int_2^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 1 dx dy.$

$A_R = \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} 1 dx dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9+y^2}} 1 dx dy + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} 1 dx dy +$   
 $\int_1^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} 1 dx dy.$  Las respuestas pueden variar considerando la simetría de  $R$ .

163.  $A_R = \int_1^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} 1 dy dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} 1 dy dx.$

$A_R = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{4-y^2}}^{4-y} 1 dx dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{4-y} 1 dx dy.$

164.  $I = \int_0^{a \operatorname{sen}(b)} \int_{y \operatorname{cot}(b)}^{\sqrt{a^2-y^2}} 1 dx dy$

$I = \int_0^{a \operatorname{cos}(b)} \int_0^{x \operatorname{tan}(b)} 1 dy dx + \int_{a \operatorname{cos}(b)}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 1 dy dx$

165.  $A_R = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2-2\sqrt{1-y^2}} 1 dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{4}{\pi} \arcsen(y-\frac{1}{2})}^{2-2\sqrt{1-y^2}} 1 dx dy + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{4}{\pi} \arcsen(y-\frac{1}{2})}^{4+\frac{4}{\pi} \arcsin(\frac{1}{2}-y)} 1 dx dy$   
 $+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{2+2\sqrt{1-y^2}}^{4+\frac{4}{\pi} \arcsen(\frac{1}{2}-y)} 1 dx dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2+2\sqrt{1-y^2}}^4 1 dx dy.$

166.  $A_R = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{\pi} \arcsen(y)} 1 dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}} 1 dx dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{1-\frac{1}{\pi} \arcsen(\frac{y}{2})} 1 dx dy$   
 $+ \int_{\sqrt{3}}^2 \int_{\frac{1}{\pi} \arcsen(\frac{y}{2})}^{1-\frac{1}{\pi} \arcsen(\frac{y}{2})} 1 dx dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_{1-\frac{1}{\pi} \arcsen(\frac{y}{2})}^{\frac{3}{4}} 1 dx dy.$

167.  $A_R = \int_0^5 \int_{\sqrt{100-20x}}^{\sqrt{100-x^2}} 1 dy dx + \int_5^6 \int_0^{\sqrt{100-x^2}} 1 dy dx + \int_6^{10} \int_0^{\frac{40-4x}{x-4}} 1 dy dx.$

168.  $A_R = 9.$

169.  $V_Q = \int_0^1 \int_0^x (1-x) dy dx = \frac{1}{6}$ .

170.  $V_Q = \int_0^1 \int_0^{\frac{1-y}{2}} (5-2x^2) dx dy = \frac{59}{48}$ .

171.  $I = \int_{\frac{a}{a+1}}^{\frac{b}{a+1}} \int_0^{1-v} f(u(1-v), uv) u dv du$ .

172.  $I = 2 \int_0^1 \int_0^{-4u+4} (\sqrt{v} + u^2) dv du = \frac{74}{15}$ .

173. 1. En el orden  $dx dy$  es  $I = \int_{-1/4}^0 \int_{-y+1/2}^{y+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy + \int_0^{1/4} \int_{y+1/2}^{-y+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy$ . En el orden  $dy dx$  es  $I = \int_{1/2}^{3/4} \int_{-x+1/2}^{x-1/2} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dy dx + \int_{3/4}^1 \int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dy dx$ .

2. Al hacer el análisis de fronteras se determina que la nueva región  $R'$  es el cuadrado  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right]$ , esto en el plano  $uv$ . También se concluye que el integrando  $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{1}{2(u+1)(v+1)}$  y que  $|J(u, v)| = -8(u+1)(v+1)$ , el cual se toma positivo. La integral  $I$  queda  $I = \iint_{R'} 4 dA' = 4A_{R'} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

174. La región  $R'$  es  $[0, 3] \times [2, 1] \in (u, v)$ , donde  $|J(u, v)| = \frac{1}{1+e^x}$ , así  $I = \iint_{R'} \frac{1}{\sqrt{v}} dA' = 6(\sqrt{2}-1)$ .

175.  $I = \int_0^{15} \int_{15}^{40} \sqrt{v+1} dv du = 410\sqrt{41} - 640$ .

176.  $I = \int_1^2 \int_2^4 (x^4 - y^4) \cdot \frac{1}{2(x^2+y^2)} dv du = \frac{1}{4} \int_1^2 \int_2^4 u dv du = \frac{3}{4}$ .

177. Se debe dibujar la región  $R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}$ , donde  $|J(u, v)| = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{v-u}}$ , así  $I = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) dv du = \frac{1}{4} \sin(1)$ .

178.  $A_R = \iint_{R'} ab dA' = abA_{R'}$ , donde  $R'$  es el círculo  $u^2 + v^2 = 1$ , con ello  $A_R = ab\pi$ .

179.  $I = \frac{1}{2} \iint_{R'} \frac{ue^{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} dA' = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ , donde  $R'$  es el círculo  $u^2 + v^2 \leq 2$ , con  $u \geq 0$ .

180. 1.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a \sec \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \csc \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ .

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a \sec \theta} f(r) r dr d\theta$ .

3.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\csc \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ .

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\tan \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\csc \theta} f(\tan \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\tan \theta) r dr d\theta$ .

5.  $\int_0^{2\pi} \int_1^3 f(r^2) r dr d\theta$ .

181.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \ln(r^2 + 1) r dr d\theta = \frac{\pi}{4} ((a^2 + 1) \ln(a^2 + 1) - a^2)$ .

182.  $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2 e^{r^2 \cos \theta}}{r} dr d\theta = 0$ .

183.  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{2}}^2 \theta \cdot r dr d\theta = \frac{3\pi^2}{32}$ .

184. La región  $R$  en coordenadas polares está dada por  $-\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  y  $0 \leq r \leq 1$ . Con ello y simplificando el integrando se llega a que  $I$  es cero.

$$185. A_R = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos(2\theta)}} r \, dr d\theta = 2a^2.$$

$$186. A_R = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r \, dr d\theta = \frac{3}{4}(2 + \pi).$$

$$187. A_R = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{ab}{4} + \frac{b^2 - a^2}{4} \arctan\left(\frac{a}{b}\right).$$

$$188. A_R = 2\pi ab - 4ab \arctan\left(\frac{a}{b}\right).$$

$$189. \quad 1. V_Q = 2 \left( \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2-0) \, dy dx + \int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2-0) \, dy dx \right).$$

2.  $V_Q = 2 \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 (1-r^2)r \, dr d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_{\cos\theta}^1 (1-r^2)r \, dr d\theta \right) = 2 \left( \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{64} \right) = \frac{11\pi}{32}$ . Durante el cálculo de esta integral aparece  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta$ , y mediante la igualdad de Wallis su valor es  $\frac{3\pi}{16}$ .

$$190. \quad 1. V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left( 12r - \frac{r^3 \cos^2 \theta}{3} - \frac{3r^3 \sin^2 \theta}{16} - r\sqrt{25-r^2} \right) \, dr d\theta = \frac{280\pi}{3}.$$

$$2. V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (18r - 2r^3) \, dr d\theta = 81\pi.$$

$$3. V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} (2\sqrt{9-r^2} - 3) r \, dr d\theta = \frac{45\pi}{4}.$$

$$191. V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (\sqrt{1-r^2} - r) r \, dr d\theta = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi.$$

$$192. \quad 1. \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(2r \cos \theta, 4r \sin \theta) 8r \, dr d\theta.$$

$$2. \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3} \sin \theta \cos^2 \theta} f(r \cos \theta, \sqrt{3}r \sin \theta) \sqrt{3}r \, dr d\theta.$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \sqrt{4-r^2} ab r \, dr d\theta.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \int_0^1 a^2 b^2 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \sqrt[6]{6} \sqrt[6]{6} r^2 \sqrt{\cos \theta \sin \theta} \, dr d\theta.$$

$$193. M = \frac{5}{24}.$$

$$194. M = \frac{4}{3}.$$

$$195. M = 40. \text{ El centro de masa es } \left( \frac{178}{75}, \frac{8}{15} \right).$$

$$196. (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{3}{8}, \frac{11}{16} \right).$$

$$197. M = \frac{27}{2} \text{ y } (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{8}{5}, \frac{1}{2} \right).$$

$$198. M = \frac{63k}{20} \text{ y el centroide es } \left( \frac{8}{7}, \frac{118}{49} \right).$$

$$199. \text{ La función densidad es constante. El centroide es } \left( \frac{2a}{5}, \frac{3b}{7} \right).$$



200. El punto buscado es  $(\frac{a}{2}, \frac{6b}{15})$ .

201. 1. Suponga que los vértices del triángulo son  $(0, 0)$ ,  $(b, 0)$  y  $(b/2, h)$ . Con ello,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{b}{2}, \frac{h}{3})$ .

2.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{5}{2}, \frac{32}{5})$ .

3.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3\pi}{16}, \frac{1}{5})$ .

202.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{3a}{2\pi})$ .

203. La función densidad es  $f(x, y) = k d((x, y), (x, 0)) = ky$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Luego,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16})$ .

204. La función densidad es  $f(x, y) = k d((x, y), (0, y)) = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Luego, la masa es  $\frac{128k}{5}$ .

205. Suponga que la función densidad es  $f(x, y) = k$ ,  $k$  es una constante. Luego,  $I_x = \frac{ka^4}{3}$ .

206. Suponga que la función densidad es  $f(x, y) = k$ ,  $k$  es una constante. Luego,  $I_x = I_y = \frac{ka^4\pi}{4}$  y  $I_0 = \frac{ka^4\pi}{2}$ .

207. Suponga que la función densidad es  $f(x, y) = k$ ,  $k$  es una constante. Luego,  $I_x = I_y = \frac{ka^4}{3}$ .

208. El cambio de variable que debe usar es  $u = \frac{y^2}{x}$  y  $v = \frac{x^2}{y}$ . Luego,  $I_x = 25$ .

209.  $M = c\pi(a^2 - b^2)$  y  $I_0 = \frac{c\pi}{2}(a^4 - b^4)$ .

### Ejercicios de la página 319

210. 1.  $I = \frac{1}{4}(-1 + \ln 4)$ .

2.  $I = \frac{1}{8}$ .

211. 1.  $I = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-z} f(x, y, z) dx dz dy$ .

2.  $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx$ .

3.  $I = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} f(x, y, z) dz dy dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$ .

4. Cualquiera que escoja debe dar como resultado  $4 - \pi$ .

212.  $V_Q = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} 1 dz dy dx$ .

213.  $V_Q = \pi a^3$ .

214.  $V_Q = 72\pi$ .

215. 1.  $V_Q = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x+2y-8}^0 1 dz dy dx = 72\pi$ .

2.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r \cos \theta + 2r \sin \theta - 8}^0 r dz dr d\theta = 72\pi$ .

216. 1. En el orden  $dx dy dz$  es  $I = \int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{6z-z^2}}^{\sqrt{6z-z^2}} \int_{-\sqrt{6z-z^2-y^2}}^{\sqrt{6z-z^2-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz +$

$$\int_{3/2}^3 \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} \int_{-\sqrt{9-y^2-z^2}}^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx dy dz.$$

En el orden  $dz dy dx$  es  $I = \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{27}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{27}{4}-x^2}} \int_{3-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$

En el orden  $dy dz dx$  es  $I = \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{3-\sqrt{9-x^2}}^{3/2} \int_{-\sqrt{6z-z^2-x^2}}^{\sqrt{6z-z^2-x^2}} f(x, y, z) dy dz dx +$   
 $\int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{3/2}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy dz dx.$

2. En el orden  $dz dr d\theta$  es  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{3-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta.$

En el orden  $dr dz d\theta$  es  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{3/2} \int_0^{\sqrt{6z-z^2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr dz d\theta +$   
 $\int_0^{2\pi} \int_{3/2}^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr dz d\theta.$

3. En el orden  $d\rho d\phi d\theta$  es  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^3 f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta +$   
 $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{6 \cos \phi} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$

En el orden  $d\phi d\rho d\theta$  es  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\pi/3} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta +$   
 $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{\pi/3}^{\arccos(\frac{\rho}{6})} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta.$

217.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r dz dr d\theta = 2\sqrt{3}\pi a^3.$

218.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2r}^{3-r} r dz dr d\theta = \pi.$

219.  $I = \frac{\pi}{3}.$

220.  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r^3 dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r^3 dz dr d\theta = \frac{964\pi}{15}.$

221.  $V_Q = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz dr d\theta = \frac{a^3}{9}(3\pi - 4).$

222. Realice el cambio  $x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Luego, la integral triple queda  $V_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\frac{5}{2}r^2 \cos^2 \theta + 5r^2 \sin^2 \theta}^{6 - \frac{7}{2}r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} dz dr d\theta = 4\pi\sqrt{2}.$

223. 1.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2r}^{3-r^2} r dz dr d\theta = \frac{7\pi}{6}.$

2.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan(1/2)} \int_{\frac{-\cos \phi + \sqrt{\cos^2 \phi + 12 \sin^2 \phi}}{2 \sin^2 \phi}}^{\frac{1}{2 \sin^2 \phi}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$

224. 1.  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} (r^2 + z^2) r dz dr d\theta = \frac{49\pi}{10}.$

2.  $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho^4 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{49\pi}{10}.$

225. 1.  $V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} r dz dr d\theta.$

$$2. V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)} \int_{(R-h)\sec\phi}^R \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

**226.** 1. Corresponde al interior del paraboloido  $3z = x^2 + y^2$  limitado superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

$$2. I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{3\cot\phi \operatorname{csc}\phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

$$3. I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{-3+\sqrt{9+4\rho^2}}{2\rho}\right)} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta.$$

$$\mathbf{227.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \int_0^{\arccos\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4\rho^2}}{2\rho}\right)} \rho^4 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\rho d\theta.$$

$$\mathbf{228.} \quad V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\phi \operatorname{csc}\phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta.$$

$$\mathbf{229.} \quad I = \frac{\pi}{10}.$$

$$\mathbf{230.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{2\cos\phi}^{4\cos\phi} \rho \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta = 4\pi.$$

$$\mathbf{231.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2\cos\phi} \rho^4 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{17\pi}{160}.$$

$$\mathbf{232.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^a \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{a^4\pi}{4}(2 - \sqrt{3}).$$

$$\mathbf{233.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{4\cos\phi} \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{7\pi}{3}.$$

$$\mathbf{234.} \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\phi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

**235.** Realice el cambio  $x = a\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ ,  $y = b\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = c\rho \cos \phi$ . Luego, la integral triple queda  $V_Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{\left(\frac{a \operatorname{sen} \phi \cos \theta}{h}\right)^{1/3}} abc\rho \operatorname{sen}^2 \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi a^2 bc}{3h}$ .

**236.**  $M = \frac{8}{15}$ . El centroide es fácil de hallar.

$$\mathbf{237.} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}\right).$$

**238.** Por la simetría del sólido  $Q$  se deduce que el centroide está sobre el eje  $z$ , siendo  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Luego,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$ .

**239.** Por la simetría del sólido se deduce que el centro de masa está sobre el eje  $z$ , esto hace que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Luego, halle  $\bar{z} = \frac{4}{3}$ . Así,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$ .

$$\mathbf{240.} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, 1 + \sqrt{2}\right).$$

$$\mathbf{241.} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{5}{9}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

$$\mathbf{242.} \quad 1. \quad M = \frac{5\pi}{2}.$$

$$2. \quad M_{xy} = \frac{7\pi}{3}, \quad M_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad M_{xz} = -\pi.$$

3.  $(0, -\frac{2}{15}, \frac{4}{15})$ .

4.  $I_x = \frac{27\pi}{8}, I_y = \frac{129\pi}{24}$  y  $I_z = \frac{37\pi}{12}$ .

5.  $I_0 = \frac{137\pi}{24}$ .

**243.** 1.  $M = 20\pi$ .

2.  $M_{xy} = \frac{272\pi}{3}, M_{yz} = \frac{2\pi}{3}$  y  $M_{xz} = \frac{2\pi}{3}$ .

3.  $(\frac{1}{30}, \frac{1}{30}, \frac{68}{15})$ .

4.  $I_x = 462\pi, I_y = 462\pi$  y  $I_z = \frac{20\pi}{3}$ .

5.  $I_0 = \frac{1396\pi}{3}$ .

**244.**  $I_z = \frac{8\pi a^5}{15}$ .

**245.**  $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}ka^5$ .

**246.**  $I_x = \frac{kabc(b^2+c^2)}{3}, I_y = \frac{kabc(a^2+c^2)}{3}$  y  $I_z = \frac{kabc(b^2+a^2)}{3}$ .

**247.** 1. La función densidad es  $f(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$  con  $k > 0$ . Con ello, y usando coordenadas esféricas, se tiene que  $M = \frac{4}{5}\pi k(b^4 - a^4)$ .

2. Usando coordenadas esféricas se tiene que  $I_z = \frac{8}{21}\pi k(b^7 - a^7)$ .

### Ejercicios de la página 343

**248.** 1.  $\operatorname{div} F = 3$ .

2.  $\operatorname{div} F = 1$ .

3.  $\operatorname{div} F = 1$ .

4.  $\operatorname{div} F = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ .

5.  $\operatorname{div} F = 4x^2$ .

6.  $\operatorname{div} F = x^2 + y^2$ .

7.  $\operatorname{div} F = z - 2y + x$ .

8.  $\operatorname{div} F = 4x + 2z - 3$ .

**249.**  $\operatorname{div} F = 0$ .

**250.**  $\operatorname{div} F = 1$ .

**254.** 1.  $\operatorname{rot} F = (0, 0, -xe^x)$ .

2.  $\text{rot } F = (0, 0, b - ax)$ .
  3.  $\text{rot } F = (-1, -3, 4xy - 4)$ .
  4.  $\text{rot } F = (0, -2z^2, 1)$ .
  5.  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ .
  6.  $\text{rot } F = (x + z^2, 0, -3 - z)$ .
  7.  $\text{rot } F = (2, 3, 4)$ .
  8.  $\text{rot } F = (2, 0, 1)$ .
  9.  $\text{rot } F = (0, 0, 3(x^2 + y^2))$ .
  10.  $\text{rot } F = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$ .
  11.  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ .
- 258.**
1. Sí es conservativo donde  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  2. Sí es conservativo donde  $f(x, y) = x^3y + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  3. Sí es conservativo donde  $f(x, y, z) = 5x^2z^3 + x - 2y^3 + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  4. No es conservativo.
  5. Sí es conservativo donde  $f(x, y, z) = x^2y^3z + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  6. Sí es conservativo donde  $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  7. Sí es conservativo donde  $f(x, y, z) = xz^2 + x + 2yz + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
  8. No es conservativo.
  9. Sí es conservativo donde  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
- 259.**
1. Es claro que  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ .
  2.  $f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
- 260.**
1. Debe comprobar que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ .
  2.  $f(x, y, z) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
- 261.**
- a) Es claro que  $\text{rot } F = (0, 0, 0)$ .
  - b)  $f(x, y, z) = \cos x \sin y + e^z - 2zy + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .
- 262.**
1.  $a = 4$ .

2.  $f(x, y, z) = 2x^2y - z^3x + K, K \in \mathbb{R}.$

**263.** 1.  $a = 5.$

2.  $f(x, y, z) = xz + 5yz^2 + y + K, K \in \mathbb{R}.$

### Ejercicios de la página 376

**264.** La curva  $\mathcal{C}$  se compone de 3 rectas. Luego  $\oint_{\mathcal{C}}(x+y) ds = \int_{\mathcal{C}_1}(x+y) ds + \int_{\mathcal{C}_2}(x+y) ds + \int_{\mathcal{C}_3}(x+y) ds = 1 + \sqrt{2}.$

**265.** La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t \sin t) dt = 8a^3$

**266.**  $I = 16\pi^2(1 + 2\pi^2).$

**267.** En este caso  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = \frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}.$

**268.** La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t + 6)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = \int_0^{2\pi} (|a \sin t| + |a \cos t|) a dt = a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t) dt + a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos t + \sin t) dt + a^2 \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\cos t - \sin t) dt + a^2 \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\cos t - \sin t) dt = 4\pi.$

**269.** 1. La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

2.  $I = \int_0^{2\pi} f(r(t)) \|r'(t)\| dt = 2\pi.$

**270.** La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (t, t^2)$  con  $t \in [-1, 1]$ . Luego  $I = \int_{\mathcal{C}}(x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy = -\frac{14}{5}.$

**271.**  $I = -2\pi a^2.$

**273.** 1. La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t\right)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = -\frac{5\pi a^4}{32\sqrt{2}}.$

2. La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = 0.$

3. La curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t\right)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Luego  $I = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}.$

**274.**  $I = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \cos t dt = \frac{2}{3}a^2.$

**275.** La curva  $\mathcal{C}$  es la unión de dos curvas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , siendo  $\mathcal{C}_1$  el segmento de recta y se parametriza como  $r_1(t) = (3t, 0, 2 - 2t)$  con  $t \in [0, 1]$ . La curva  $\mathcal{C}_2$  es el arco circular, y se parametriza como  $r_2(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0)$  con  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Con ello  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = -4 + \frac{27}{2}\pi.$

**276.** Una posible parametrización para cada curva es  $\mathcal{C}_1 : r_1(t) = (0, \cos t, \sin t)$  con  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\mathcal{C}_2 : r_2(t) = (t, 0, 1 - 2t)$  con  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\mathcal{C}_3 : r_3(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t, 0)$  con  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Con ello,  $I = -1 + -\frac{1}{4} + (-\frac{\pi}{128} + 1) = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{128}$ .

**277.** La curva  $\mathcal{C}$  es triangular con orientación  $(1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1)$  y de vuelta a  $(1, 0, 0)$ . Cada uno de los tres segmentos se parametriza generando tres integrales de línea. Finalmente  $I = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ .

**278.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y) = x^2y + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego,  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f(3, 2) - f(1, 2) = 18 - 2 = 16$ .

**279.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)^{-1/2} + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego,  $I = f(e^{2\pi}, 0) - f(1, 0) = 1 - e^{-\pi}$ .

**280.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego,  $I = \frac{1}{3}$ .

**281.** 1. La función potencial es  $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

2.  $I = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) = e^{3\pi} + 1$ .

**282.** 1.  $r(t) = (1 + 2t, 2 + 2t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Luego  $I = 236$ .

2. La función potencial es  $f(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego,  $I = f(3, 4) - f(1, 2) = 240 - 4 = 236$ .

**283.** 1. La función potencial es  $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$  con  $K \in \mathbb{R}$ .

2.  $W = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f(2, 0) - f(0, 0) = 2 - 0 = 2$  por ser independiente del camino.

3.  $W = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 0$  pues  $F$  es conservativo.

**284.** Tome  $F(x, y) = (e^{x+y^2}, 2ye^{x+y^2})$ , verifique que es conservativo cuya función potencial es  $f(x, y) = e^{x+y^2} + K$ , con  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $\int_{\mathcal{C}} e^{x+y^2} dx + 2ye^{x+y^2} dy = f(1, 0) - f(-1, 0) = e - e^{-1}$ .

**285.** 1. La función potencial es  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + K$  con  $K \in \mathbb{R}$ .

2. Aplique el Teorema Fundamental para integrales de línea, esto es  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = f(\alpha(b), \beta(b)) - f(\alpha(a), \beta(a))$ .

**286.** Muestre que  $F$  es conservativo tal que su función potencial es  $f(x, y, z) = x^2y + zy + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $W = 0$ .

**287.** Muestre que  $F$  es conservativo tal que su función potencial es  $f(x, y, z) = x^2y + y \sin z + 2z + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $I = f(1, 0, 1) - f(0, 0, 0) = 2$ .

**288.** Muestre que  $F$  es conservativo y por tanto  $I = 0$ .

**289.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y, z) = \frac{-\cos(xy)}{1+z^2} + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $W = \int_C F \cdot dr = f(B) - f(A) = -\frac{1}{10}$ .

**290.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y, z) = x^2y + z^2e^x + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $I = f(B) - f(A) = 25e^{-1} - 10$ .

**291.** Muestre que  $F$  es conservativo con función potencial  $f(x, y, z) = xy^3 - z \tan x + 2x + K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Luego  $I = \frac{\pi}{4} \ln\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$ .

### Ejercicios de la página 400

**292.**  $\iint_R (2xy^2 - 3xy^2) dA = -\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy = -\frac{1}{6}$ .

**293.**  $\iint_R (y^3) dA = \int_0^1 \int_0^x y^3 dy dx = \frac{1}{20}$ .

**294.**  $\iint_R 6xy dA = 6 \int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{6-x^2}} xy dy dx = 16$ .

**295.** La dirección es negativa, luego por el Teorema de Green

$$\oint_C F \cdot dr = -\iint_R e^x (e^{-y} - e^y) dA = -\int_0^2 \int_y^{y+2} e^x (e^{-y} - e^y) dx dy = \frac{1}{2} (5 - 5e^2 - e^4 + e^6).$$

**296.** Suponga que la curva  $\mathcal{C}$  es recorrida en sentido positivo, además es la unión de tres curvas:

$\mathcal{C}_1$  que es el segmento de recta de  $A$  a  $B$  y se parametriza como  $r_1(t) = (t, 1)$  con  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{C}_2$  que es el segmento de recta de  $B$  a  $C$  y se parametriza como  $r_2(t) = (1, 1+t)$  con  $t \in [0, 1]$ , y  $\mathcal{C}_3$  que es la parábola  $y = x^2 + 1$  de  $B$  a  $C$  y se parametriza como  $r_3(t) = (t, t^2 + 1)$  con  $t \in [0, 1]$ . Luego,  $\oint_C F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr - \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr = 2 - 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ . El negativo de la tercera integral se debe a la dirección de la curva. Por otro lado  $\oint_C F \cdot dr = \iint_R (-1) dA = -\int_0^1 \int_1^{x^2+1} dy dx = -\frac{1}{3}$ .

**297.** Tome  $f_1(x, y) = \frac{2x^3+2xy^2-2y}{x^2+y^2}$  y  $f_2(x, y) = \frac{2y^3+2x^2y+2x}{x^2+y^2}$ , ambas se indefinen en el origen.

Construya un círculo  $\mathcal{C}_a$  de radio  $a$  centrado en  $(0, 0)$  con dirección negativa, donde  $a$  sea tan pequeño que dicho círculo quede completamente contenido en  $R$ , por el Teorema de Green para regiones huecas se tiene que  $\oint_C F \cdot dr + \oint_{\mathcal{C}_a}^+ F \cdot dr = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA = 0$ , de donde  $\oint_C F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}_a}^+ F \cdot dr$  pues  $\mathcal{C}_a$  posee dirección opuesta a  $\mathcal{C}$ . Esta última integral se calcula parametrizando  $\mathcal{C}_a$  como  $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , finalmente el resultado debe ser  $4\pi$ .

**298.**  $\oint_C e^x(1 - \cos y) dx + e^x(-y + \sin y) dy = -\iint_R (e^x y) dA = -\int_0^\pi \int_0^{\sin x} (e^x y) dy = \frac{1}{5}(1 - e^\pi)$ .

**299.**  $\oint_C (e^{\sqrt{x}} + 1) dx + (x^2 + \cos(y^{\sqrt{2}})) dy = \iint_R 6x dA = 6 \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cos \theta dr d\theta = 14$ .

**300.**  $\oint_C (\sin x^2 - y^3) dx + (x^3 + e^{y^2}) dy = \iint_R 3(x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 dr d\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

**301.**  $I = \iint_R (y - x) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} (r \sin \theta - r \cos \theta) r dr d\theta = -\frac{a^3}{8}\pi$ .

**302.** Tome  $f_1 = x^3y^2 - 2x$  y  $f_2 = x + y^2$ . Por Teorema de Green se tiene que  $\oint_C F \cdot dr = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA = \int_{-2}^2 \int_{-3\sqrt{4-y^2}}^{4-y^2} (1 - x^3y) dx dy = \frac{32}{3} + 6\pi$ . Ahora se debe calcular  $\oint_C F \cdot dr$  de forma directa, donde  $\mathcal{C}$  es la unión de dos curvas:  $\mathcal{C}_1 : x = 4 - y^2$  con  $x \in [0, 4]$  y se parametriza



como  $r_1(t) = (4 - t^2, t)$ ,  $t \in [-2, 2]$ , y  $C_2 : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  con  $x \in [-6, 0]$  y se parametriza como  $r_2(t) = (6 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Con ello  $\oint_C F \cdot dr = \oint_{C_1} F \cdot dr + \oint_{C_2} F \cdot dr = 16 + (6\pi + \frac{16}{3}) = \frac{32}{3} + 6\pi$ .

**303.** Para el área,  $A_R = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 dt$ , esto se llega después de una serie de simplificaciones. El resultado es  $A_R = \frac{3\pi}{2}$ .

### Ejercicios de la página 443

**305.**  $A_S = 2a^2(\pi - 2)$ .

**306.** El plano se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 7 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4})$  con  $(x, y) \in R$ . Luego  $A_S = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = \sqrt{\frac{29}{16}} A_R = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ .

**307.** La superficie  $S$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 1 + 3\sqrt{x^2 + y^2})$  con  $(x, y) \in R$ . Luego  $A_S = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = \sqrt{10} A_R = 4\sqrt{10}$ .

**308.**  $A_S = 6\pi + \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ .

**309.**  $A_S = 20\pi$ .

**310.**  $A_S = 6\pi$ .

**312.**  $A_S = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{z^2-y^2}} dz dy = \pi$ , o bien,  $A_S = \iint_R \sqrt{2} dx dy = \pi$ , donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{1/2} \leq 1\}$ .

**313.**  $A_S = \sqrt{2} \int_0^a \int_a^{a-z} dy dx = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ .

**314.**  $A_S = 8a^2 \arcsin(\frac{b}{a})$ .

**315.**  $A_S = 2\sqrt{a} \int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^{-\sqrt{ax}} \frac{\sqrt{2x+a}}{2ax-y^2} dy dx$ .

**316.**  $A_S = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax}}^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx = 8a^2$ .

**317.**  $A_S = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ .

**318.**  $S$  se puede paramertizar como  $r(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$  donde  $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ . Con esto

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(r(\theta, z)) \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial z} \right\| dA = \sqrt{2} \iint_R (z^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{28}$$

**319.**  $S$  se puede paramertizar como  $r(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$  donde  $(\theta, z) \in [0, \pi/2] \times [0, 1]$ . Con esto  $\iint_S xy e^{xz} dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\cos \theta \sin \theta e^{\cos \theta}) dz d\theta = e - 2$ .

**321.** El flujo es  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \int_0^4 \int_0^1 (-2x^3 z + x) dx dz = -2$ .

**322.** El flujo es  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_R dA = A_R = 2$ , donde  $R$  es el rectángulo  $[0, 1] \times [-1, 1]$  en el plano  $xy$ .

**323.** 1.  $\frac{1}{2}$ .

2. Es claro que el plano es  $x + y + z = 1$ , luego tome  $z = -x - y$ . Al final la respuesta debe ser  $\frac{1}{2}$ .

**324.** Note que  $\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS$ , donde  $S_1$  es la superficie plana  $z = 0$  con  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , y  $S_2$  es la superficie esférica  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  con  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Así  $\iint_S F \cdot dS = 0 + \frac{2}{5}\pi a^5 = \frac{2}{5}\pi a^5$ .

**325.**  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( \frac{r^6}{4} \cos \theta + r^3 \cos^2 \theta + \frac{r^3}{2} + 3r \right) dr d\theta = -20\pi$ .

### Ejercicios de la página 463

**327.** 1.  $S$  está formada por tres superficies:  $S_1$  la tapa de abajo del cilindro,  $S_2$  el borde cilíndrico y  $S_3$  la tapa de arriba del cilindro. Luego,  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = 0 - 54\pi + 36\pi = -18\pi$ .

2.  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_Q (4x - 3 + 2z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^2 (4r^2 \cos \theta - 3r + 2zr) dr d\theta = -18\pi$ .

**328.**  $S$  está formada por cuatro superficies:  $S_1$  el cilindro generalizado  $z = 1 - x^2$ ,  $S_2$  el plano  $z = 0$ ,  $S_3$  el plano  $y = 0$  y  $S_4$  el plano  $y = 2$ . Luego  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \frac{16}{3} + 0 + 0 + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ . Por otro lado  $\iiint_Q \text{div } F dV = \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{1-x^2} 4y dz dy dx = \frac{32}{3}$ .

**329.**  $S$  está formada por dos superficies:  $S_1$  el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y  $S_2$  la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Luego  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \frac{7\pi}{6}$ . Por otro lado  $\iiint_Q \text{div } F dV = \iiint_Q (y + 2z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} (r \sin \theta + 2z) dz dr d\theta = \frac{7\pi}{6}$ .

**331.** Tome  $F(x, y, z) = (4x + z, x - y^2, 2yz)$ , luego, con el Teorema de la Divergencia y usando coordenadas esféricas se llega a que  $I = \iiint_Q \text{div } F dV =$

$$4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{3\sqrt{3}\sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \int_0^6 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta +$$

$$4 \int_0^{2\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \int_0^{-3\sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 4(81\sqrt{3}\pi + 99\pi).$$

**332.**  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \iiint_Q \text{div } F dV - \iint_{S_2} F \cdot dS$ , donde  $S_2$  se encuentra sobre el plano  $z = 1$ . Luego,  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \frac{\pi}{2} - -\pi = \frac{3\pi}{2}$ .

**333.** Ambas superficies se cortan en  $z = 1$ . Luego  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \iiint_Q \text{div } F dV - \iint_{S_2} F \cdot dS$ , de donde  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$ .

**334.** Usando el Teorema de la Divergencia deduzca que  $V_Q = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot dS$ , donde  $Q$  es la esfera y  $S$  la superficie sobre  $Q$ . Para calcular la integral de superficie puede usar una parametrización de  $S$  recurriendo a las coordenadas esféricas, con ello  $\frac{1}{3} \iint_S F \cdot dS = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}$ .

**335.** Por el Teorema de la Divergencia  $\iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = 0$  pues  $\operatorname{div} F = 0$ . Así,  $\iint_{S_1} F \cdot dS = -\iint_{S_2} F \cdot dS$ , donde  $S_2$  se puede parametrizar como  $r(x, y) = (x, y, 0)$  con proyección circular  $R$  dada por  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Luego  $-\iint_{S_2} F \cdot dS = -\iint_R (2xy, -y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dA = \iint_R 1 \, dA = A_R = \pi$ .

**336.**  $S_1$  es la esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  para  $z \leq 1$ . Defina  $S = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_2$  es el plano  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Así,  $S$  es una superficie cerrada que encierra un sólido  $Q$ . Aplicando el Teorema de la Divergencia se tiene que  $\iint_{S_1} F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV - \iint_{S_2} F \cdot dS = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12}$ . En la resolución de la integral triple puede ayudar las coordenadas esféricas generalizadas.

**337.**  $I = \iiint_Q (2y + 2) \, dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_x^8 (r \operatorname{sen} \theta + 1) r \, dz \, dr \, d\theta = 64\pi$ .

**338.**  $\iint_S F \cdot dS = \iint_Q \operatorname{div} F \, dV = 3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{r^2-1}} r \, dz \, dr \, d\theta + 3 \int_0^{2\pi} \int_2^{\sqrt{7}} \int_0^{\sqrt{7-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 12\sqrt{3}\pi$ .

**339.**  $I = \iint_S F \cdot dS = \iint_Q \operatorname{div} F \, dV = 3 \iint_Q \operatorname{div}(x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \frac{192\pi}{5}$ .

**340.**  $\iint_S F \cdot dS = \iint_Q \operatorname{div} F \, dV = 0$  pues  $\operatorname{div} F = 0$ .

**341.** Deduzca que  $F(x, y, z) = (y, z, x)$ , por tanto  $\operatorname{div} F = 0$ . Con ello  $\iint_S (xy + yz + zx) \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = 0$ .

**342.** 1. El gradiente de la superficie es  $(2x, 2y, 2(z-1))$ , luego el vector  $\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 2(z-1))}{\|(2x, 2y, 2(z-1))\|} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z-1}{3}\right)$ . Con ello se deduce que  $F = \left(\frac{x}{2}, \frac{3y}{2}, z-1\right)$ .

2. Cierre la superficie  $S$  añadiendo la superficie  $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z = 1\}$ . Luego, aplicando el Teorema de la Divergencia se tiene que  $\iint_S F \cdot dS + \iint_{S'} F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV$ , donde  $Q$  es la semiesfera cerrada. Con ello,  $\iint_S F \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV - \iint_{S'} F \cdot dS = \iiint_Q 3 \, dV - \iint_{S'} F \cdot dS = 54\pi - 0 = 54\pi$ .

## Ejercicios de la página 482

**343.**  $I = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = 3 \iint_R (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

**344.** Deduzca que la curva  $\mathcal{C}$  es la intersección de las superficies  $z = 2xy$  y  $x^2 + y^2 = 1$ , de allí la superficie  $S$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, 2xy)$  donde  $R$  es la región circular  $x^2 + y^2 \leq 1$ , así  $I = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_R (-2z, -3x^2, -1) \cdot (-2y, -2x, 1) \, dA = \pi$ , usando coordenadas polares. El negativo de la dirección  $\vec{n}$  se debe a que la curva  $\mathcal{C}$  está recorrida en sentido horario (negativo), por lo que la superficie  $S$  debe quedar con vector normal unitario hacia abajo.

**345.**  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = -9 \int_0^{2\pi} dt = -18\pi$  y por otro lado  $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = -2 \iint_R dA = -18\pi$ , donde  $R$  es la región circular  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

**346.** Se determina el valor de  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \oint_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr + \oint_{\mathcal{C}_3} F \cdot dr + \oint_{\mathcal{C}_4} F \cdot dr = \frac{1}{e} + 0 - 1 + 0 = \frac{1}{e} - 1$ . Luego, siendo  $S$  la superficie sobre el plano  $z = 1$  cuya proyección es el

cuadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  se halla el valor de  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} = \iint_R (0, -e^{y-z}, -e^{y-z}) \cdot (0, 0, 1) dA = \int_0^1 \int_0^1 -e^{y-1} dy dx = \frac{1}{e} - 1$ .

**347.** La curva  $\mathcal{C}$  corresponde a  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  y se asume que está orientada positivamente. Luego,  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = 12\pi$ .

**348.** Note que  $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$  y  $\text{rot } F = (0, 0, -2)$ . Luego,  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = -16\pi$ .

**349.**  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R \frac{3}{\sqrt{3}} dA = 3$ , donde  $R$  es el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**351.**  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 36\pi = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$ , donde  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R (4x + 6y + 4) dA$  y  $R$  es la región circular  $x^2 + y^2 \leq 3$  en el plano  $z = 0$ .

**352.** Por el Teorema de Stokes se tiene que  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$ , donde la superficie  $S$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, -x - y)$  donde  $R$  es la región es circular  $(x - 4)^2 + y^2 \leq 16$ . Luego,  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R (2y + 2z, 2z + 2x - 1, 2x + 2y) \cdot (1, 1, 1) dA = \iint_R (4(x + y + z) - 1) dA = \iint_R -1 = -A_R = -16\pi$ .

**353.** Por el Teorema de Stokes se tiene que  $I = \oint_{\mathcal{C}} y dx + z dy + x dz$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  se genera de la intersección entre el paraboloides y el plano, la cual es la elipse  $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  y se parametriza como  $r(t) = (1 + \cos t, 2 \sin t, 2 + 2 \cos t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , con ello  $I = 2\pi$ .

**354.** Primero  $\text{rot } F = (x + z^2, -z - 3)$ , luego  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R (x^2 + xz^2 + z + 3) dA = 2\pi$ . Para la integral de línea, la curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , con ello  $\oint_{\mathcal{C}} 3y dx - xz dy + yz^2 dz = 20\pi$ .

**355.** Primero  $\text{rot } F = (0, 0, 1)$ , luego  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R 1 dA = A_R = 6\pi$ . Para la integral de línea, la curva  $\mathcal{C}$  se parametriza como  $r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 0)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , con ello  $\oint_{\mathcal{C}} y dx + 2x dy + z^2 dz = 6\pi$ .

**356.** Primero  $\text{rot } F = (1, -1, 1)$ , luego  $W = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$ , donde la superficie  $S$  se parametriza como  $r(x, y) = (x, y, y)$ , donde  $(x, y) \in R$  y  $R$  es la región cuadrada  $|x| + |y| \leq 1$ , es decir,  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$ . Luego,  $W = \iint_R (1, -1, 1) \cdot (0, -1, 1) dS = 2A_R = 2 \cdot 2 = 4$ .

**357.** Por el Teorema de Stokes se tiene que  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ , donde la curva  $\mathcal{C}$  se genera de la intersección de las superficies  $z = 1 - x^2$  y  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , la cual se parametriza como  $r(t) = (\cos t, 1 + \sin t, \sin^2 t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Con ello  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} xy dx + x dy + z dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t - \sin^2 t \cos t + \cos^2 t + 2 \sin^3 t \cos t) dt = \pi$ .

**358.** La curva  $\mathcal{C}$  es la intersección entre el cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  y el plano  $2x + y - z = 0$ . Luego, la superficie  $S$  se puede parametrizar como  $r(x, z) = (x, -2x + z, z)$  con  $(x, z)$  sobre la región  $R$  circular sobre el plano  $xz$  dada por  $x^2 + z^2 \leq 1$ , entonces por el Teorema de Stokes se tiene que  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \iint_R (1, -2z, 1 - x) \cdot (2, 1, -1) dA = \iint_R (1 - 2z + x) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r \sin \theta + r \cos \theta) r dr d\theta = \pi$ .

**359.** La curva  $\mathcal{C}$  es la intersección entre el cilindro  $(y - 4)^2 + z^2 = 1$  y el plano  $x - 3y - z = -4$ . Luego, la superficie  $S$  se puede parametrizar como  $r(y, z) = (3y + z - 4, y, z)$  con  $(y, z)$  sobre la región  $R$  circular sobre el plano  $yz$  dada por  $(y - 4)^2 + z^2 \leq 1$ , entonces por el Teorema de Stokes se tiene que  $I = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R (z, y^2, -2yz) \cdot (1, -3, -1) \, dA = \iint_R (z - 3y^2 + 2yz) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin \theta - 3(4 + r \cos \theta)^2 + 2r \sin \theta(4 + r \cos \theta)) \, r \, dr \, d\theta = -\frac{195\pi}{4}$ .

# Capítulo 8

## Apéndices

Los contenidos de estos apéndices en su mayoría son de Álgebra Lineal. Cabe destacar que son estudiados de una forma muy superficial y enfocándose en lo necesario para algunos procesos que se usaron en el texto. En este sentido, para profundizar más estos contenidos, se recomienda consultar Barrantes (2012), Lay (2012) o Arce, Castillo y González (2011), o cualquier otro texto de la preferencia del lector.

## Repaso de matrices.

**Definición 1 (Matriz)** Una matriz de tamaño  $n \times m$ , con entradas en  $\mathbb{R}$ , es un arreglo rectangular de números reales constituidos por  $n$  filas y  $m$  columnas y se escribe como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

**Observación 1** Algunos aspectos de notación son:

1. En forma abreviada se escribe  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ . El elemento  $a_{ij}$  denota la entrada de la matriz  $A$  en la fila  $i$  y columna  $j$ .
2. El conjunto de las matrices de orden  $n \times m$  con entradas en  $\mathbb{R}$  se denota  $M(n, m, \mathbb{R})$ .
3. Una matriz cuadrada es aquella que posee igual número de filas y columnas. El conjunto de matrices cuadradas de tamaño  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{R}$  se denota  $M(n, \mathbb{R})$ .
4. Una matriz fila es una matriz de tamaño  $1 \times m$ .

5. Una matriz columna es una matriz de tamaño  $n \times 1$ .

**Definición 2 (Matriz nula)** La matriz nula es la matriz de tamaño  $n \times m$  cuyas entras son todas cero y se denota  $0_{n \times m}$ , esto es:

$$0_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definición 3 (Matriz identidad)** La matriz identidad de orden  $n$ , denotada como  $I_n$ , es la matriz  $I = (a_{ij})_{n \times n}$  con la propiedad  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ , obteniendo la matriz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

A cada fila de la matriz  $I_n$  se denomina el  $n$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^n$  y se denota con  $e_n$ . Por ejemplo:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

**Definición 4 (Matriz diagonal)** Una matriz diagonal es una matriz  $D = (d_{ij})_{n \times n}$  con la propiedad  $d_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , y se escribe

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Definición 5 (Matriz triangular superior)** Una matriz triangular superior es una matriz  $U = (u_{ij})_{n \times n}$  con la propiedad  $u_{ij} = 0$  si  $i > j$ , y se escribe

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Definición 6 (Matriz triangular inferior)** Una matriz triangular inferior es una matriz  $L = (l_{ij})_{n \times n}$  con la propiedad  $l_{ij} = 0$  si  $i < j$ , y se escribe

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Definición 7 (Matriz transpuesta)** Sea  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  una matriz, la matriz transpuesta de  $A$ , denotada como  $A^t$ , es la matriz  $A^t = (a_{ji})_{m \times n}$ .

**Ejemplo 1** Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & -1 \\ -4 & \sqrt{3} & \pi & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ , entonces  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & \sqrt{3} \\ 3 & \pi \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ .

**Definición 8 (Matriz simétrica)** Una matriz cuadrada  $A$  es simétrica si  $A = A^t$ , es decir, tiene la característica de ser igual a su transpuesta.

**Ejemplo 2** Sea  $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ , compruebe que  $A$  es simétrica.

**Solución:**

Note que  $A^t = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ , y por tanto  $A = A^t$ , es decir,  $A$  es simétrica.



**Definición 9 (Suma de Matrices y multiplicación por un escalar)** Sean  $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$  con  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se define:

1. El producto por escalar como  $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ .
2. La suma de matrices como  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

**Teorema 1** Sean  $A, B, C \in M(n, m, \mathbb{R})$  con  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  y  $C = (c_{ij})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $A + B = B + A$  (propiedad conmutativa).
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (propiedad asociativa).
3.  $0 + A = A + 0$  (elemento neutro con respecto a la suma).
4.  $-A + A = A + -A$  (inverso con respecto a la suma).
5.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  (propiedad distributiva).
6.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  (propiedad distributiva).
7.  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$  (propiedad asociativa).

**Definición 10 (Producto o multiplicación de matrices)** Sea  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$  y  $B \in M(m, p, \mathbb{R})$ . El producto de  $A$  por  $B$ , denotado como  $AB$ , es la matriz  $C \in M(n, p, \mathbb{R})$  con  $C = (c_{ij})$  definida por

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1m}b_{m1} & \dots & a_{11}b_{1p} + a_{1m}b_{mp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{nm}b_{m1} & \dots & a_{n1}b_{1p} + a_{nm}b_{mp} \end{pmatrix}.$$

**Teorema 2** Sea  $A, B, C$  matrices con entradas reales y con tamaños adecuados para que sus productos y sus sumas estén bien definidos y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $A(BC) = (AB)C$  (propiedad asociativa).
2. Si  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$  entonces  $I_n A = A I_m = A$ . (propiedad de neutro)
3.  $A(B + C) = AB + AC$  (propiedad distributiva).

4.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B$  (propiedad asociativa).

**Observación 2** Algunos aspectos a considerar son:

1. El producto de matrices es no conmutativo es decir,  $AB \neq BA$ , más aún, el producto  $AB$  puede existir mientras que  $BA$  no o viceversa.
2. Si  $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$  entonces  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
3. Si  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$  y  $B \in M(m, p, \mathbb{R})$  entonces  $(AB)^t = B^t A^t$ .
4. Si  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ .

## Repaso sistemas de ecuaciones lineales

**Definición 11 (Sistema de ecuaciones lineales  $n \times m$ )** Un sistema de  $n$  ecuaciones lineales y  $m$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , también llamado un sistema de tamaño  $n \times m$  o simplemente un sistema de ecuaciones lineales  $n \times m$ , se escribe de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

donde  $a_{ij}$  y  $b_i$  son números reales. El símbolo  $a_{ij}$  denota el coeficiente en la ecuación  $i$  ( $i$ -ésima fila) asociado a la variable  $j$  ( $j$ -ésima columna).

**Ejemplo 3** El siguiente es un sistema de tamaño  $3 \times 4$  con las incógnitas  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ .

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 \qquad \qquad \qquad + 12x_3 - 6x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

**Observación 3** Cuando el sistema posee dos o tres variables, se suele escribir  $x, y$  y  $z$  en vez de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , respectivamente.

**Definición 12 (Solución de un sistema de ecuaciones lineales  $n \times m$ )** Dado un sistema de ecuaciones lineales  $n \times m$ , se dice que la  $m$ -tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  es una solución del sistema,

si satisface cada una de las ecuaciones. El conjunto de todas soluciones se denota como  $S$ , y es el conjunto de todas las  $m$ -tuplas que satisface al sistema de ecuaciones lineales  $n \times m$ .

**Ejemplo 4** Dado el sistema de ecuaciones lineales  $3 \times 3$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases},$$

se puede verificar que  $(4, -2, 3) \in S$ .

**Ejemplo 5** Note que  $S = \{(-1 - 5t, 4 - 2t, t, 2), t \in \mathbb{R}\}$  es el conjunto de solución para el sistema lineal  $3 \times 4$  dado por

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

**Definición 13 (Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales)** La matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales de tamaño  $n \times m$  con coeficientes reales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases},$$

es la matriz  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

**Definición 14 (Matriz Aumentada)** Si a la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales se le agrega los valores  $b_i$  como última columna se denomina matriz aumentada y se denota  $(A|b)$ ,

esto es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

**Ejemplo 6** La matriz asociada y la matriz aumentada del sistema lineal

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 3 \\ 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & | & 9 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & | & 3 \\ 0 & 10 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

**Observación 4** Si un sistema de ecuaciones lineales se representa como una matriz aumentada, las operaciones elementales sobre las filas<sup>1</sup> de dicha matriz aumentada se definen y denotan de la siguiente manera:

1. Multiplicar la  $i$ -ésima fila por un número real  $k$  diferente de 0. Se denota  $kf_i \rightarrow f_i$ .
2. Multiplicar la  $i$ -ésima fila por un número real  $k$  y sumarla a la  $j$ -ésima fila. Se denota  $kf_i + f_j \rightarrow f_j$ .
3. Intercambiar la  $i$ -ésima fila por la  $j$ -ésima fila. Se denota  $f_i, f_j$ .

**Definición 15 (Matriz escalonada)** Sea  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ ,  $A$  es escalonada si es nula (todas sus entradas son 0) o si satisface que:

1. Si tiene filas nulas, estas aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento no nulo de cada fila, si existe, es 1.
3. El primer 1 de la segunda fila y sucesivas, está a la derecha del primer 1 de la fila anterior.

**Ejemplo 7** Las siguientes matrices aumentadas son escalonadas:

---

<sup>1</sup>Análogamente se pueden definir las operaciones elementales sobre las columnas.

$$1. (A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$2. (B|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$3. (C|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Observación 5** De acuerdo con las matrices aumentadas y escalonadas anteriores, se tiene que:

1. Permiten reconocer los sistemas que poseen solución de los que no la tienen. En el ejemplo anterior no es difícil notar que la matriz  $(A|b)$  es inconsistente (no tiene solución), mientras que las matrices  $(B|b)$  y  $(C|b)$  son consistentes (tienen solución).
2. Una ecuación de un sistema que corresponde a una fila nula es una ecuación superflua o redundante, por ejemplo observe la matriz  $(C|b)$  anterior.

**Definición 16 (Método de Eliminación de Gauss)** El método de eliminación de Gauss o reducción Gaussiana consiste en reducir la matriz aumentada del sistema en una matriz escalonada usando operaciones elementales sobre las filas o columnas. Para ello, no hay una secuencia única de operaciones elementales a seguir.

**Definición 17 (Matriz escalonada reducida)** Una matriz  $A \in M(n, m\mathbb{R})$  es escalonada reducida si es escalonada y además todo elemento en una columna, arriba del primer 1 de cualquier fila es 0.

**Ejemplo 8** Las siguientes dos matrices son ejemplos de matrices escalonadas reducidas:

$$1. A = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$2. B = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Ejemplo 9** La matriz identidad  $I_n$  es una matriz escalonada reducida.

**Definición 18 (Método de Eliminación de Gauss-Jordan)** El método de eliminación de Gauss-Jordan consiste en reducir la matriz aumentada del sistema en una matriz escalonada reducida usando operaciones elementales sobre las filas o columnas. Este método es similar a la eliminación de Gauss, sin embargo, requiere de una mayor cantidad de operaciones elementales para llegar al resultado.

**Ejemplo 10** Determine el conjunto de solución utilizando eliminación de Gauss-Jordan de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

**Solución:**

Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3}f_2 \rightarrow f_2]{\frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\frac{-f_1+f_4 \rightarrow f_4}{-2f_1+f_3 \rightarrow f_3}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right)} \xrightarrow[\frac{-2f_2+f_4 \rightarrow f_4}{f_2+f_3 \rightarrow f_3}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right)} \\ & \xrightarrow[\frac{-\frac{2}{3}f_3+f_4 \rightarrow f_4}{\frac{3}{2}f_3 \rightarrow f_3}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right)} \xrightarrow[\frac{-\frac{1}{3}f_3+f_2 \rightarrow f_2}{-\frac{2}{3}f_3+f_4 \rightarrow f_4}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right)} \\ & \xrightarrow[\frac{-\frac{1}{3}f_4+f_1 \rightarrow f_1}{\frac{3}{4}f_4 \rightarrow f_4}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)} \xrightarrow[\frac{f_4+f_3 \rightarrow f_3}{\frac{1}{3}f_4+f_2 \rightarrow f_2}]{\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)}. \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto de solución es  $S = \{(0, -2, 3, 1)\}$ .

**Ejemplo 11** Halle el conjunto de solución para el sistema lineal dado por

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

### Solución:

La matriz aumentada asociada al sistema dado corresponde a  $\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 1 & 10 \\ -2 & 5 & 0 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$ .

Luego, usando el método de eliminación de Gauss-Jordan se tendría que:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 1 & 10 \\ -2 & 5 & 0 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1, f_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 10 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{2f_1+f_2 \rightarrow f_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2 \rightarrow f_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 10 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\begin{array}{l} -2f_2+f_3 \rightarrow f_3 \\ f_2+f_1 \rightarrow f_1 \end{array}]{-3f_3+f_1 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-3f_3+f_1 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

De acá se deduce que  $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ . Tome como parámetro a  $x_3$ , es decir, sea  $x_3 = t$ , con

$t \in \mathbb{R}$ , entonces el conjunto de solución es

$$S = \{(-1 - 5t, 4 - 2t, t, 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

**Definición 19 (Matrices equivalentes)** Sean  $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$ , se dice que  $A$  es equivalente por filas a  $B$ , si  $B$  se obtiene de  $A$  por aplicación de operaciones elementales por fila o columna, en tal caso se denota como  $A \sim B$  o bien  $A \rightarrow B$ .

**Teorema 3** Sea  $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ , entonces existe una única matriz  $B \in M(n, m, \mathbb{R})$  **escalonada reducida** tal que  $A \sim B$ .

## Repaso de matrices inversas y determinantes

**Definición 20 (Matriz inversa)** Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , se dice que  $A$  es invertible si existe una matriz  $B \in M(n, \mathbb{R})$  tal que  $AB = BA = I_n$ . En este caso a la matriz  $B$  se le llama la matriz inversa de  $A$  y se denota como  $A^{-1}$

**Observación 6** Sumado a la definición anterior, se cumple que:

1. Una condición necesaria aunque no suficiente para que una matriz tenga inversa es que sea cuadrada.
2. Si una matriz tiene inversa su inversa es única.
3. Suponga que  $A \in M(n, \mathbb{R})$  es una matriz invertible y se desea encontrar  $A^{-1}$ . Note que la igualdad

$$AA^{-1} = I_n$$

es equivalente a resolver simultáneamente los  $n$  sistemas lineales de la forma  $AX_j = e_j$  para  $j = 1, \dots, n$ , donde  $X_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $A^{-1}$  y  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces se puede solventar el problema de hallar  $A^{-1}$  resolviendo el sistema lineal definido por la matriz aumentada

$$(A|I_n).$$

**Ejemplo 12** Determine la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ .

### Solución:

De acuerdo con la observación anterior se debe resolver el sistema lineal definido por la matriz aumentada  $(A|I_3)$ , esto es:

$$\begin{aligned} (A|I_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-f_1 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-2f_1 + f_3 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-4f_2 + f_3 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$



$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}f_3 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 5f_3+f_1 \rightarrow f_1 \\ -2f_3+f_2 \rightarrow f_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 5 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Por tanto, la matriz inversa buscada es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 5 & -\frac{5}{4} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

**Teorema 4** Sean  $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ :

1. Si  $A$  es invertible, entonces  $A \sim I_n$ .
2. Si  $A$  es invertible entonces  $A^{-1}$  es invertible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
3. Si  $A, B$  son invertibles entonces  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
4. Si  $A$  es invertible entonces  $A^t$  es invertible y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Definición 21 (Determinante)** Un determinante es una función que a cada matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , le asigna un número real, denotada como  $|A|$ ,  $\det(A)$  o  $D(A)$ . Esta función se define de forma recursiva por:

1. Para  $n = 1$ , es decir para matrices de  $1 \times 1$ , como  $|A| = a_{11}$ .
2. Para  $n > 1$ , entonces se elige cualquier fila  $i$  de la matriz  $A$  y se define

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}| \end{aligned},$$

donde  $A_{ik}$  es la submatriz de tamaño  $M(n-1, \mathbb{R})$  que se obtiene de eliminar la fila  $i$  y la columna  $k$  de la matriz  $A$ .

**Ejemplo 13** Calcule el determinante de matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

Tome la fila 1, entonces

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^2a_{11}|A_{11}| + (-1)^3a_{12}|A_{12}| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 14** Encuentre el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

Usando el ejemplo y la definición anterior, considere la fila 1, entonces:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^2 \cdot (-1) \cdot |A_{11}| + (-1)^3 \cdot (0) \cdot |A_{12}| + (-1)^4 \cdot (5) \cdot |A_{13}| \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 14 + 0 - 10 = 4. \end{aligned}$$

**Teorema 5** Sean  $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ , se cumple que:

1.  $A$  es invertible si y solo si  $|A| \neq 0$ , y en cuyo caso  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .
2.  $|A| = |A^t|$ .
3. Si  $A$  es una matriz triangular superior, entonces  $|A|$  es igual al producto de los elementos de la diagonal.
4.  $|AB| = |A||B|$ .
5.  $|kA| = k^n|A|$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .
6. Si  $B$  es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de  $A$ , entonces  $|A| = -|B|$ .
7. Si  $B$  es la matriz que se obtiene al multiplicar una fila de  $A$  por una constante  $k \in \mathbb{R}$  distinta de cero, entonces  $|A| = \frac{1}{k}|B|$ .
8. Si  $B$  es la matriz que se obtiene al multiplicar una fila de  $A$  por una constante  $k \in \mathbb{R}$  y sumarla a otra fila de  $A$ , entonces  $|A| = |B|$ .

**Teorema 6** Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$  tal que  $|A| \neq 0$  y sea  $(A|b)$  la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Entonces dicho sistema tiene solución única, dada por

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & b & A_{i+1} & \cdots & A_n \end{vmatrix}}{|A|} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n,$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son las columna de  $A$ . Este proceso se conoce como regla de Cramer.

**Ejemplo 15** Utilice la regla de Cramer para hallar la solución del sistema  $\begin{cases} -x + 5z = -2 \\ y + 2z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$ .

**Solución:**

La matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

Por un ejemplo anterior,  $|A| = 4$ . Ahora, según la regla de Cramer, se tendría que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{108}{4} = 27, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-24}{4} = -6, \quad \text{y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20}{4} = 5.$$

Por tanto, el conjunto de solución es  $S = \{(27, -6, 5)\}$ .

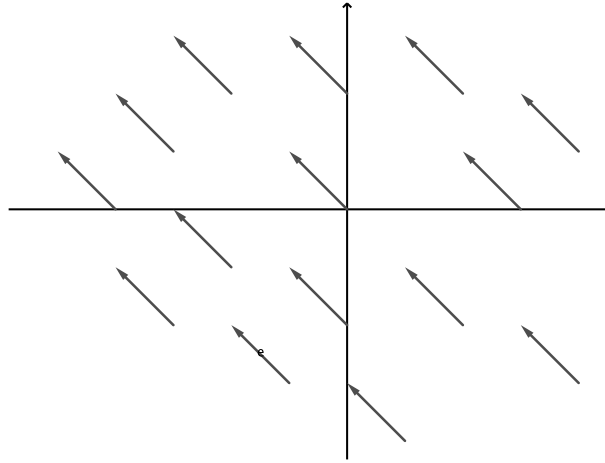
## Repaso de vectores

**Definición 22 (Operaciones con puntos)** Dados  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ , se define

1. Producto escalar  $\alpha P = (\alpha p_1, \alpha p_2, \dots, \alpha p_n)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. La suma de dos puntos  $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$ .

**Definición 8.1 (Segmento dirigido)** Sean  $P$  y  $Q$  puntos de  $\mathbb{R}^n$ , el segmento dirigido con punto inicial  $P$  y punto final  $Q$ , denotado  $\overrightarrow{PQ}$ , se define como  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ .

**Definición 8.2 (Vector)** Un vector en  $\mathbb{R}^n$ , denotado  $\vec{u}$ , representa al conjunto de todos los segmentos dirigidos  $\overrightarrow{PQ}$  tal que  $\vec{u} = Q - P$  para  $P$  y  $Q$  puntos de  $\mathbb{R}^n$ , como lo muestra la siguiente figura en  $\mathbb{R}^2$ .



Representaciones de un vector en  $\mathbb{R}^2$

**Observación 7** Sobre la definición anterior, es importante considerar que:

1. Todo vector tiene infinitas representaciones.
2. Para cada vector, hay una representación única cuyo punto inicial es  $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . A esta representación se le llama representación geométrica normal de un vector.
3. El vector nulo o vector cero es el vector que representa a los segmentos dirigidos de la forma  $\overrightarrow{PP} = P - P = \vec{0}$ .

**Ejemplo 16** Determine el vector  $\vec{u}$  que representa al segmento dirigido  $\overrightarrow{PQ}$  con  $P = (1, -2, 3)$  y  $Q = (2, 4, 3)$ .

**Solución:**

Es claro que  $\vec{u} = Q - P = (2, 4, 3) - (1, -2, 3) = (1, 6, 0)$ .

**Definición 23 (Operaciones con vectores)** Dado  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ , se define:

1. Producto por escalar  $\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. La suma de dos vectores  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ .

**Teorema 7** Sean  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (propiedad conmutativa).
2.  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (propiedad asociativa).
3.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (elemento neutro de la adición).
4.  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$  (elemento inverso de la adición).
5.  $1\vec{u} = \vec{u}$  (elemento neutro del producto por escalar).
6.  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$  (propiedad distributiva).
7.  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$  (propiedad distributiva).
8.  $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$  (propiedad asociativa).

**Definición 24 (Producto punto o producto escalar)** Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dos vectores en  $\mathbb{R}^n$ . El producto punto o producto escalar de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , denotado  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , se define como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{k=1}^n u_kv_k.$$

**Ejemplo 17** Calcule el producto entre  $\vec{u} = (-1, 2, 7)$  y  $\vec{v} = (4, -2, 5)$ .

**Solución:** Se tiene que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot -2 + 7 \cdot 5 = -4 + -4 + 35 = 27$ .

**Teorema 8** Si  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (propiedad conmutativa).
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  (propiedad distributiva).
3.  $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$  (donde  $\vec{0}$  es el vector nulo).
4.  $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ .
5.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ , con  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  sí y solo sí  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**Definición 25 (Norma de un vector)** Sea  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ , la norma de  $\vec{u}$ , denotada  $\|\vec{u}\|$ , se define como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (u_k)^2}.$$

La norma de un vector mide la longitud o magnitud del vector.

**Ejemplo 18** Determine la norma del vector  $\vec{u} = (-1, 2, 7)$ .

**Solución:**

Es claro que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (7)^2} = 3\sqrt{6}$ .

**Observación 8** De acuerdo con la norma de un vector se tiene que:

1. Si  $\|\vec{u}\| = 1$  se dice que  $\vec{u}$  es un vector unitario.
2. Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , entonces el vector unitario  $\vec{u}$  en la misma dirección que  $\vec{v}$  se puede calcular como  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ .

**Ejemplo 19** Calcule el vector unitario en la misma dirección que  $\vec{v} = (-2, 1)$ .

**Solución:**

Según la observación anterior el vector buscado es  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ .

**Teorema 9** Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $\|\vec{u}\| \geq 0$ , con  $\|\vec{u}\| = 0$  sí y solo sí  $\vec{u} = \vec{0}$ .
2.  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$ .
3.  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$  (desigualdad de Cauchy-Schwarz).
4.  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  (desigualdad triangular).
5.  $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

**Definición 26 (Vectores paralelos y ortogonales)** Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores no nulos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

1.  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos si el ángulo entre ellos es 0 o  $\pi$ .

2.  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales si el ángulo entre ellos es  $\frac{\pi}{2}$ .

**Teorema 10** Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores no nulos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

1.  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos si son proporcionales, es decir, existe un número real  $\alpha$  tal que  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ .
2.  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Definición 27 (Producto vectorial o cruz)** Sean  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ , el producto vectorial o producto cruz de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , denotado  $\vec{u} \times \vec{v}$ , es un vector en  $\mathbb{R}^3$  definido como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

donde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  son los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , y el determinante se calcula usando la fila uno.

**Ejemplo 8.1** Determine el producto cruz de  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  y  $\vec{v} = (2, -1, 10)$ .

**Solución:**

En relación con la definición anterior, el producto vectorial buscado es

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 23\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Por tanto,  $\vec{u} \times \vec{v} = (23, -4, -5)$ , o bien, simplemente se escribe  $\vec{u} \times \vec{v} = 23\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$

**Observación 9** El producto vectorial o cruz entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  genera un tercer vector  $\vec{w}$  de  $\mathbb{R}^3$ , el cual es ortogonal tanto a  $\vec{u}$  como a  $\vec{v}$ , es decir,  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$  y  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ . De hecho, en el ejemplo anterior note que  $(1, 2, 3) \times (2, -1, 10) = (23, -4, -5)$  y que  $(1, 2, 3) \cdot (23, -4, -5) = 0$  y  $(2, -1, 10) \cdot (23, -4, -5) = 0$ .

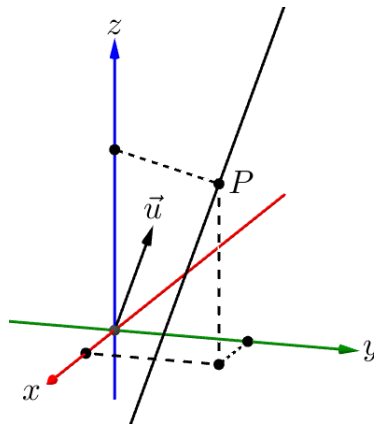
**Teorema 11** Sean  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  vectores en  $\mathbb{R}^3$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

1.  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .
2.  $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$ .
3.  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  sí y solo sí  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ .

4.  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ .
5.  $\vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}$ .
6.  $\vec{u} \times \vec{v}$  es ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  simultáneamente.
7.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ .
8.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ .

## Repaso de rectas en $\mathbb{R}^3$

Una recta  $l$  en  $\mathbb{R}^3$  queda completamente determinada si se indica un punto  $P$  de la recta y un vector  $\vec{u}$  que describe la dirección, como se aprecia en la figura adjunta.



Recta  $l$  que pasa por  $P$  con dirección  $\vec{u}$

**Definición 28 (Ecuación Vectorial Paramétrica de una recta en  $\mathbb{R}^3$ )** Sea  $X$  un punto cualquiera de la recta  $l$ , necesariamente entonces  $\overrightarrow{PX}$  es paralelo a  $\vec{u}$ , es decir, existe un  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}$$

$$\Rightarrow X - P = t\vec{u}$$

$$\Rightarrow X = P + t\vec{u},$$

lo que se denomina **ecuación vectorial paramétrica** de la recta  $l$ . Suponiendo que  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  es el vector director de la recta  $l$ ,  $P(p_1, p_2, p_3)$  es el punto de  $l$  y  $X(x, y, z)$  es un



punto cualquiera de  $l$ , entonces la ecuación vectorial se puede escribir como

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3).$$

**Definición 29 (Ecuaciones Escalares Paramétricas de una recta en  $\mathbb{R}^3$ )** Considere la ecuación vectorial de una recta  $l$  en  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3).$$

Sumando el lado derecho de la igualdad se deduce que

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \\ z = p_3 + tu_3 \end{cases},$$

que se conocen como las **ecuaciones escalares paramétricas** de la recta  $l$ .

**Definición 30 (Ecuaciones Simétricas de una recta en  $\mathbb{R}^3$ )** En la definición anterior el parámetro  $t$  es el mismo para cada una de las tres ecuaciones escalares dadas, al despejar  $t$  de cada una de ellas se obtiene

$$t = \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3},$$

siempre que  $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 \neq 0$  y  $u_3 \neq 0$ . A estas ecuaciones se le llaman **ecuaciones simétricas** de la recta  $l$ .

**Observación 10** Las ecuaciones definidas con anterioridad no son únicas para una recta  $l$  en el espacio, ya que existen infinitud de vectores directores e infinitud de puntos para una recta.

**Ejemplo 20** Determine las ecuaciones vectoriales, escalares y simétricas de la recta  $l$  que contiene a los puntos  $P = (2, -1, 6)$  y  $Q = (3, 1, -2)$ .

### Solución:

Fácilmente se llega a concluir que las ecuaciones buscadas <sup>2</sup> son, respectivamente:

1. Vectoriales:  $(x, y, z) = (2, -1, 6) + t(1, 2, -8)$ .

---

<sup>2</sup>Recuerde que no son únicas, usted puede dar otras soluciones correctas si quisiera.

$$2. \text{ Escalares: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 6 - 8t \end{cases} .$$

$$3. \text{ Simétricas: } x - 2 = \frac{y + 1}{2} = \frac{6 - z}{8} .$$

**Ejemplo 21** Determine la forma paramétrica vectorial de las siguientes tres rectas:

$$1. l_1 : \frac{2 - x}{3} = \frac{y}{-1}, z = -1$$

$$2. l_2 : x = y = z$$

$$3. l_3 : \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

**Solución:**

La recta  $l_1$  pasa por el punto  $P_1(2, 0, -1)$  y tiene vector director  $\vec{u}_1 = (-3, -1, 0)$ . Así, la forma paramétrica vectorial de  $l_1$  es

$$(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(-3, -1, 0).$$

La recta  $l_2$  pasa por el punto  $P_2(0, 0, 0)$  y tiene vector director  $\vec{u}_2 = (1, 1, 1)$ . Con ello, la forma paramétrica vectorial de  $l_2$  es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 1, 1).$$

La recta  $l_3$  pasa por el punto  $P_3(4, 1, 0)$  y tiene vector director  $\vec{u}_3 = (0, -2, 1)$ . Entonces, la forma paramétrica vectorial de  $l_3$  es

$$(x, y, z) = (4, 1, 0) + t(0, -2, 1).$$

**Ejemplo 22** Pruebe que las rectas  $l_1 : (x, y, z) = (1, -3, -2) + t(1, 2, -1)$  y  $l_2 : (x, y, z) = (17, 4, -8) + s(3, 1, -1)$  se intersecan y halle el punto de intersección.

**Solución:**

Las ecuaciones escalares de las rectas dadas son:

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \text{y} \quad l_2 : \begin{cases} x = 17 + 3s \\ y = 4 + s \\ z = -8 - s \end{cases}$$

Con ello, se puede generar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t - 3s = 16 \\ 2t - s = 7 \\ -t + s = -6 \end{cases},$$

que a su vez se escribe en forma matricial como  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ .

Como el sistema sí posee solución (de lo contrario no existe intersección), entonces las rectas  $l_1$  y  $l_2$  se intersecan. Luego, para hallar el punto de intersección, y de acuerdo con la solución del sistema anterior, basta tomar  $t = 1$  en la recta  $l_1$  (o bien tomar  $s = -5$  en la recta  $l_2$ ) y se obtiene que el punto de intersección es  $(2, -1, -3)$ .

### Definición 31 (Rectas paralelas y rectas perpendiculares)

1. Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son también paralelos, es decir, sus vectores directores son proporcionales.
2. Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales, es decir, el producto punto de sus vectores directores es cero. Es importante recordar que dos rectas perpendiculares en  $\mathbb{R}^3$ , no necesariamente se intersecan.

## Repaso de planos en $\mathbb{R}^3$

Un plano  $\pi$  en  $\mathbb{R}^3$  queda determinado de forma completa si se indica un punto y dos vectores directores del plano.

**Definición 32 (Ecuación Vectorial Paramétrica del Plano)** Suponga que  $\pi$  es un plano que pasa por el punto  $P(p_1, p_2, p_3)$  y posee vectores directores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Si  $X(x, y, z)$  es un punto cualquiera del plano  $\pi$ , la **ecuación vectorial** de dicho plano es

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3).$$

**Definición 33 (Ecuaciones Escalares Paramétricas del Plano)** Las ecuaciones escalares del plano  $\pi$  están dadas por

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}.$$

**Ejemplo 23** Determine las ecuaciones paramétricas del plano  $\pi$  que contiene los puntos  $P = (1, 2, -1)$ ,  $Q = (4, 5, -6)$  y  $R = (3, 2, 1)$ .

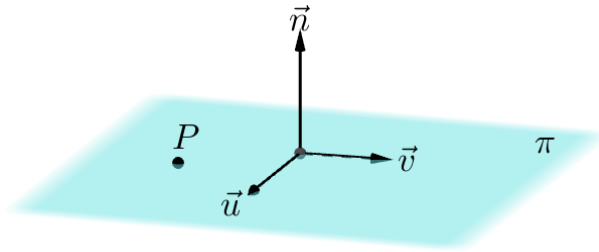
**Solución:**

Los vectores directores del plano  $\pi$  son  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 3, -5)$  y  $\overrightarrow{PR} = R - P = (2, 0, 2)$ . Luego las ecuaciones buscadas son, respectivamente:

1. Vectoriales:  $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(3, 3, -5) + s(2, 0, 2)$

2. Escalares: 
$$\begin{cases} x = 1 + 3t + 2s \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - 5t + 2s \end{cases}$$

**Definición 34 (Vector normal a un plano)** Se llama vector normal a un plano  $\pi$ , a cualquier vector  $\vec{n}$  que sea ortogonal a cualesquiera de los vectores directores del plano, como lo muestra la siguiente figura.



Plano  $\pi$  que pasa por  $P$  con dirección  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , y vector normal  $\vec{n}$

**Definición 35 (Ecuación normal del plano)**

Observe que si  $P$  es un punto dado del plano y  $X$  es un punto cualquiera del plano, entonces el vector normal  $\vec{n}$  es ortogonal a  $\overrightarrow{PX}$ , es decir:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (X - P) = 0.$$

Si se hace  $\vec{n} = (a, b, c)$ ,  $P(p_1, p_2, p_3)$  y  $X(x, y, z)$  se tiene que:

$$(a, b, c) \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = d,$$

donde  $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ . Así, se define la ecuación  $ax + by + cz = d$  como **ecuación normal** del plano o bien **ecuación cartesiana** del plano, donde  $\vec{n} = (a, b, c)$  y  $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ .

**Ejemplo 24** Encuentre una ecuación cartesiana del plano determinado por los puntos  $P(4, -3, 1)$ ,  $Q(6, -4, 7)$  y  $R(1, 2, 2)$ .

**Solución:**

Los vectores directores del plano son  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -1, 6)$  y  $\overrightarrow{PR} = R - P = (-3, 5, 1)$ . Ahora, un vector normal tanto a  $\overrightarrow{PQ}$  como a  $\overrightarrow{PR}$  es el generado por el producto cruz de ellos mismos, esto es:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-31, -20, 7).$$

De esta forma  $\vec{n} = (-31, -20, 7)$  y una ecuación cartesiana del plano es

$$-31x - 20y + 7z = -57.$$

**Definición 36 (Planos paralelos y planos perpendiculares)** Dos planos en  $\mathbb{R}^3$  son paralelos si sus vectores normales son paralelos y son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

**Ejemplo 25** El plano  $\pi$  contiene al punto  $P(2, -1, 3)$  y es paralelo al plano dado por  $3x - y + z = 0$ , determine la ecuación cartesiana de  $\pi$ .

**Solución:**

Como el plano  $\pi$  es paralelo al plano  $3x - y + z = 0$ , entonces un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (3, -1, 2)$ . De esta manera, se concluye que

$$3x - y + z = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 3x - y + z = 10$$

es la ecuación buscada.

## Repaso de Secciones Cónicas

Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas cuadráticas planas que se obtienen de intersecar un cono y un plano, siempre y cuando dicho plano no pase por el vértice. Se clasifican en tres tipos: elipse, parábola e hipérbola. El interés de este repaso es reconocer las ecuaciones canónicas de éstas, tanto de forma algebraica como geométrica, donde no existe rotación.

**Definición 37 (La elipse)** La elipse es una figura geométrica curva y cerrada, con dos ejes perpendiculares desiguales, que resulta de cortar la superficie de un cono por un plano **no perpendicular** a su eje. La ecuación general de una alipse es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

donde  $(x_0, y_0)$  es el centro y  $a, b$  son los semiejes. .En este caso, si  $a > b$  la elipse es horizontal y si  $a < b$  la elipse en vertical.

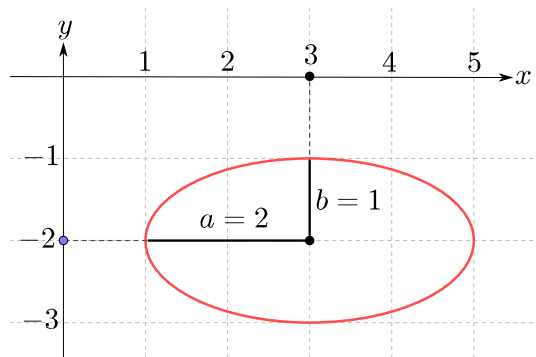
**Ejemplo 26** Dada la ecuación  $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$ , verifique que representa una elipse horizontal y dibújela.

### Solución:

Basta con hacer arreglos algebraicos y llegar a una forma canónica reconocida, esto es:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) + 21 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 6x + 9 - 9) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 21 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 - 9 + 4(y + 2)^2 - 16 + 21 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 &= 4 \\ \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{4} + (y + 2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Observe que la elipse es horizontal y está centrada en  $(3, -2)$ . Su gráfica es la siguiente:



Gráfica de la elipse  $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$

**Observación 11** Si en una elipse se tiene que  $a = b$ , entonces la ecuación cartesiana canónica se escribe como

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

siendo esta la ecuación cartesiana de un círculo centrado en  $(x_0, y_0)$  y de radio  $a$ .

**Definición 38 (La hipérbola)** La hipérbola es una figura geométrica que se obtiene de la intersección del cono con un plano que no pase por su vértice y que forme un ángulo con el eje del cono menor que el ángulo que forma con el eje generatriz del cono. La ecuación general de una hipérbola es

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

donde  $(x_0, y_0)$  es el centro y  $a, b$  son los ejes. En este caso, si en la ecuación anterior el negativo lo contiene “ $y$ ” la hipérbola es horizontal, y si el negativo lo contiene “ $x$ ”, es una hipérbola vertical

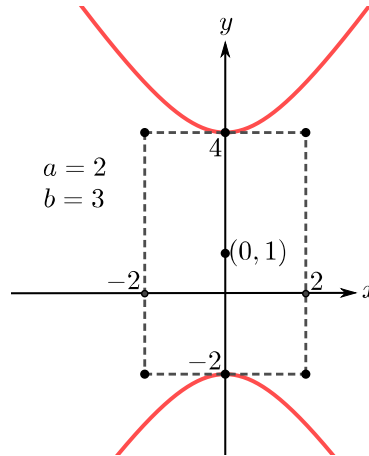
**Ejemplo 27** Considere la curva de ecuación  $9x^2 - 4y^2 + 8y + 32 = 0$ , verifique que representa una hipérbola vertical y gráfiquela.

### Solución:

De forma similar a la solución del ejemplo 26, se hacen arreglos algebraicos, entre ellos completar cuadrados, y se llega a la forma canónica

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1,$$

la cual es una hipérbola vertical y de centro  $(0, 1)$ , como se aprecia en la figura adjunta.



Gráfica de la hipérbola  $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

**Definición 39 (La parábola)** La parábola es una figura geométrica que resulta de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje del cono sea igual al presentado por su generatriz. Las ecuaciones de la parábola con vértice en  $(x_0, y_0)$  son:

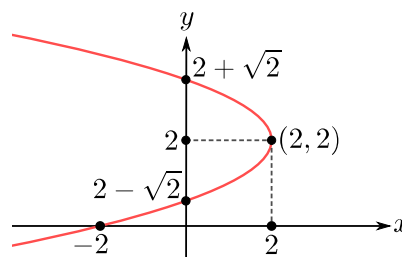
- $y = ax^2 + bx + c$ , la cual es una parábola vertical con vértice en  $\left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ .
- $x = ay^2 + by + c$ , la cual es una parábola horizontal con vértice en  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ .

Es claro que  $a, b$  y  $c$  son constantes con  $a \neq 0$ .

**Ejemplo 28** Grafique la parábola horizontal  $x = y^2 - 4y + 6$ . Además indique su vértice y las intersecciones con los ejes coordenados.

**Solución:**

El vértice corresponde al punto  $\left(-\frac{-4}{2}, \frac{-16 + 24}{4}\right) = (2, 2)$ . Luego, la gráfica de la parábola es la siguiente:



Gráfica de la parábola  $x = y^2 - 4y + 6$



**Observación 12** Cuando se corta un cono con un plano y este último pasa por el vértice, entonces la intersección puede producir dos rectas, o una recta, o un punto y se llaman **cónicas degeneradas**.

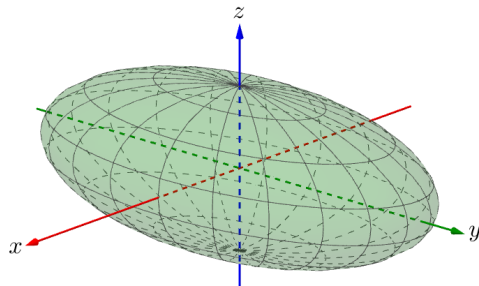
## Repaso de Cuádricas

Las cuádricas son superficies cuadráticas, de las cuales se repasa las más elementales y con ecuaciones sin términos mixtos o cruzados, es decir, que representan superficies no rotadas.

**Definición 40 (El elipsoide)** El elipsoide centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, corresponde a una superficie cuadrática definida por la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

llamada ecuación canónica del elipsoide. Así, por ejemplo, un elipsoide centrado en  $(0, 0, 0)$  tendría una forma similar a la figura adjunta.



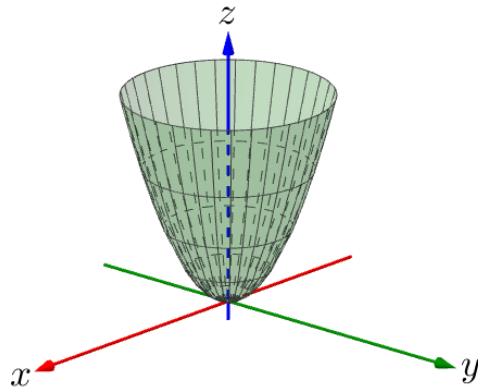
Elipsoide con ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

**Observación 13** Si  $a = b = c$  en la ecuación canónica del elipsoide, entonces representa una esfera de radio  $a$ .

**Definición 41 (El paraboloides elíptico)** El paraboloides elíptico centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, corresponde a una superficie cuadrática definida por cualquiera de las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{(z - z_0)}{c}$$

Así, un paraboloides elíptico centrado en  $(0, 0, 0)$  con ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$  tendría una forma como la figura siguiente.

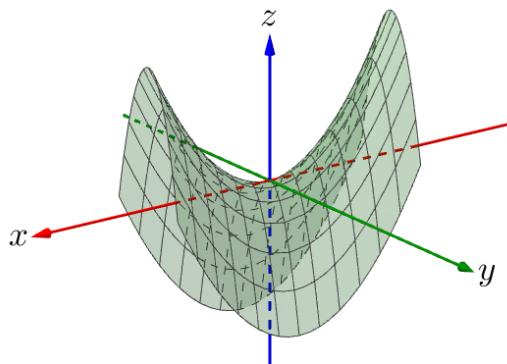


Paraboloide elíptico con ecuación  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

**Definición 42 (El paraboloide hiperbólico)** El paraboloide hiperbólico centrado en  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, es una superficie cuadrática definida por cualquiera de las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{(z - z_0)}{c}.$$

Así, el paraboloide hiperbólico  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$  centrado en  $(0, 0, 0)$  tendría una forma como la figura siguiente.

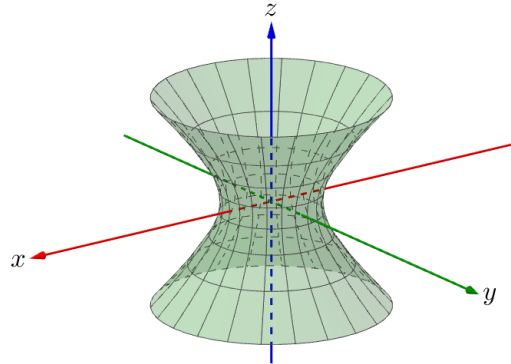


Paraboloide hiperbólico con ecuación  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ .

**Definición 43 (El hiperbolide de una hoja)** El hiperbolide de una hoja centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, es una superficie cuadrática con ecuación canónica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

En esta ecuación se colocó el negativo a la variable  $z$ , sin embargo, el negativo lo puede llevar cualquiera de las tres variables  $x, y$  o  $z$ . Así, un hiperboloide de una hoja (con la variable  $z$  negativa) centrado en  $(0, 0, 0)$  tendría una forma como la expuesta abajo.

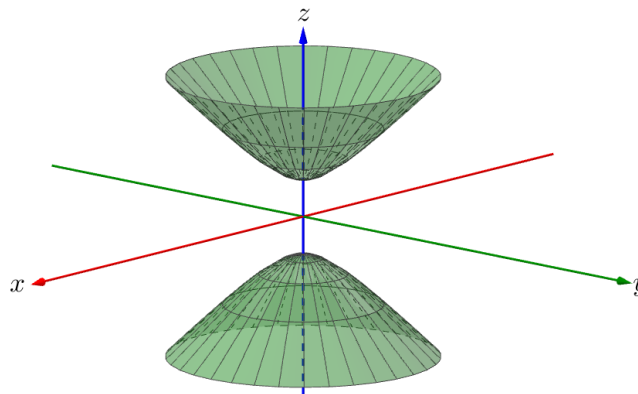


Hiperbolide de una hoja con ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

**Definición 44 (El hiperbolide de dos hojas)** El hiperboloide de dos hojas centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, es una superficie cuadrática con ecuación canónica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Esta ecuación posee dos variables negativas (las variables  $y$  y  $z$ ), sin embargo, los dos negativos los puede llevar cualquier pareja formada por las variables  $x, y, z$ . Además, siempre abre en dirección a la variable positiva. Por ejemplo, un hiperboloide de dos hojas con la ecuación  $\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ , centrado en  $(0, 0, 0)$ , se aprecia en la figura siguiente.

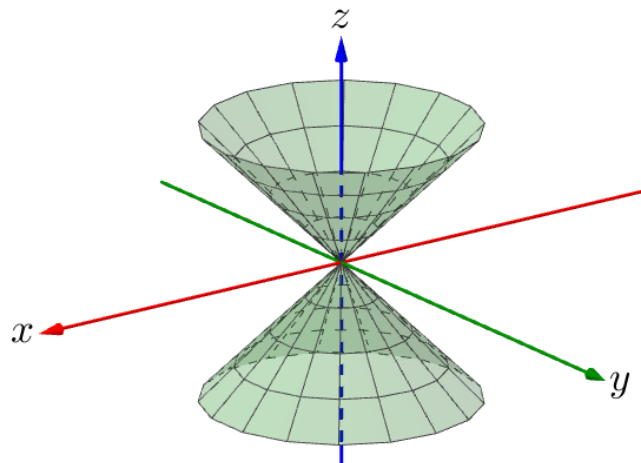


Hiperbolide de dos hojas con ecuación  $\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$

**Definición 45 (El cono elíptico)** El cono elíptico centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , no rotado, corresponde a una superficie cuadrática definida por la ecuación canónica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0.$$

En la ecuación anterior, el negativo lo contiene la variable  $z$ , sin embargo, puede llevarlo cualquiera de las otras dos variables. Además, el cono abre en dirección a la variable negativa. Así un cono elíptico centrado en  $(0, 0, 0)$  de la forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  corresponde a la figura de abajo.



Cono elíptico con ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

## Bibliografía

- [1] Acuña, O. y Poltronieri, J. (2008). *Ejercicios de Cálculo III. Cálculo Diferencial e Integral III*. (3ra. Ed.). San José: Serie Cabécar, Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.
- [2] Arce, C., Castillo, W. y González, J. (2011). *Álgebra Lineal*. San José: Editorial UCR.
- [3] Apostol, T. (2004). *Calculus. Volumen II*. (2da. Ed.). Barcelona: Reverté S.A.
- [4] Ávila, J. (2017). *Cálculo en varias variables. Una guía para estudiantes*. San José: EUCR.
- [5] Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. (2a. Ed.). San José: EUNED.
- [6] Cátedra de Cálculo III, sigla MA1003, de la Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática, Departamento de Matemática Aplicada. Exámenes del 2006 al 2018.
- [7] González, M. (1999). *Análisis Real*. San José: EUNED.
- [8] Hass, J., Thomas, G. y Weir, M. (2010). *Thomas' Calculus. Early Transcendentals*. (12va. Ed.). Boston: Pearson Education.
- [9] Lay, D. (2012). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. (3ra. Ed.). México: Pearson Education.
- [10] Mora, W. (2019). *Cálculo en varias variables. Visualización interactiva*. (2da. Ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Tomado de <http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/>.
- [11] Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. (1er. Ed.). Juárez: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.
- [12] Poltronieri, J. (2006). *Ejercicios de integrales dobles, triples y múltiples*. San José: Serie Cabécar, Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.
- [13] Poltronieri, J. (2006). *Ejercicios de integrales de línea y superficie*. San José: Serie Cabécar, Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.
- [14] Poltronieri, J. (2003). *Calculo Integral. Integración Múltiple*. San José: Serie Cabécar, Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.
- [15] Rogawski, J. (2012). *Cálculo: varias variables*. (2da. Ed.). Barcelona: Reverté S.A.
- [16] Stewart, J. (2002). *Cálculo Multivariable*. (4ta. Ed.). México, D.F.: Thomson Learning.

- [17] Thomas, G. (2008). *Cálculo en varias variables* (12va. Ed.). México D.F.: Pearson Education.
- [18] Walker, M. *Material de Apoyo para MA1003*. Tomado de <http://apuntesmiguel.net/MA1003.html>



El autor posee bachillerato y licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, además, de un título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Educativa. Sus publicaciones se orientan en buscar estrategias didácticas para enseñar contenidos matemáticos de difícil comprensión. Es docente de Matemática en la Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica. Ha desempeñado cargos administrativos como el de director del Departamento de Ciencias Naturales de dicha institución. Asimismo, ha colaborado en proyectos de investigación, de acción social y de docencia. Ha sido director y lector, en múltiples ocasiones, de Trabajos Finales de Graduación para optar por el grado y título de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.

UCR

ISBN: 978-9930-9689-8-7



9 789930 968987